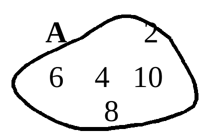
Teoria degli insiemi

Per capire il linguaggio degli insiemi è opportuno conoscere il significato dei simboli che utilizzeremo:

$\forall$ quantificatore universale (per ogni ….; qualunque sia)
$\exists$ (esiste almeno un …)
$\wedge$ (and) (congiunzione "e")
$\vee$ dal latino vel (o uno o l'altro)
: oppure / (tale che…)

Nel linguaggio matematico ricorre spesso la nozione di insieme. Essa è una nozione primitiva e quindi non può essere definita. Diciamo comunque che un numero finito o infinito di elementi costituisce un insieme quando è possibile stabilire se ciascun elemento appartiene ($a \in A$) o non appartiene ($b \notin A$) all'insieme dato.
Le lettere dell'alfabeto, i numeri pari, le regioni italiane, **sono** esempi di insieme.
Le più belle città d'Italia, i libri più interessanti della biblioteca **non sono** insiemi.
Un insieme può essere rappresentato in tre modi diversi:

1. per elencazione $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$;
2. per caratteristica $A = \{a / a \in \aleph_p \ 2 \le a \le 10\}$
3. graficamente con i diagrammi di Eulero - Venn



Un insieme che non ha elementi si chiama insieme vuoto e si indica con il simbolo $\varnothing$.

Sottoinsiemi

Diciamo che l'insieme B è un sottoinsieme di A quando tutti gli elementi di B sono elementi di A e scriviamo: $B \subseteq A$ (B è contenuto in A).
Fra i sottoinsiemi di A c'è lo stesso insieme A che è detto sottoinsieme improprio di A.
Se il sottoinsieme B è un sottoinsieme proprio di A scriveremo $B \subset A$.

Chiamiamo **insieme delle parti** di un dato insieme A l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri e impropri di A.
Ad esempio: se $A = \{1; 2; 3\}$ $P_{(A)} = \{\varnothing; A; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}\}$

Operazioni

Dati gli insiemi $A = \{a; b; c\}$ e $B = \{c; d; e\}$
chiamiamo **insieme unione** l'insieme formato dagli elementi di A e dagli elementi di B presi una sola volta. Nel nostro caso:
$A \bigcup B = \{a; b; c; d; e\}$ oppure $A \bigcup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
Osserviamo, in particolare, che: $A \bigcup A = A$ e $A \bigcup \varnothing = A$.

Chiamiamo **insieme intersezione** degli insiemi A e B l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B. Riferendoci al caso precedente $A \bigcap B = \{c\}$. Ovvero:
$A \bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Chiamiamo **insieme differenza** fra A e B l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B. Nel nostro caso $A - B = \{a; b\}$. Cioè $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Proprietà degli insiemi

L'uguaglianza tra insiemi gode delle proprietà:

- riflessiva $A = A$
- simmetrica $A = B \Rightarrow B = A$
- transitiva $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

La relazione di inclusione gode delle proprietà:

- riflessiva $A \subseteq A$
- antisimmetrica $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$
- transitiva $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

L'operazione di unione gode delle proprietà:

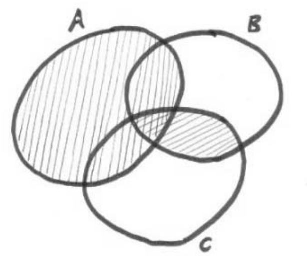
- riflessiva $A \bigcup A = A$
- simmetrica $A \bigcup B = B \bigcup A$
- associativa $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$

L'operazione di intersezione gode delle proprietà:

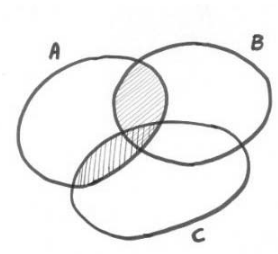
- riflessiva $A \bigcap A = A$
- simmetrica $A \bigcap B = B \bigcap A$
- associativa $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

Proprietà distributiva

- $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$



- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

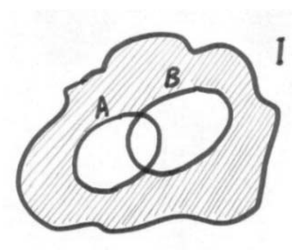


Formule di DE MORGAN

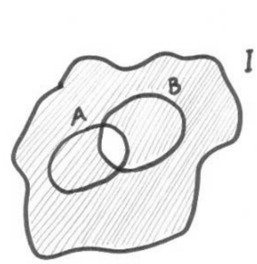
Indichiamo con I l'insieme infinito o insieme universo o spazio ambiente che contiene tutti i possibili insiemi $A, B, \ldots$

Per ogni insieme $A \subseteq I$ chiamiamo complementare di A in I e lo indichiamo con $C_I\, A$ o anche con A' l'insieme degli elementi di I che non appartengono ad A.

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$



- $(A \cap B)' = A' \cup B'$



Casi particolari:

$$A \cup A' = I$$
$$A \cap A' = \varnothing$$