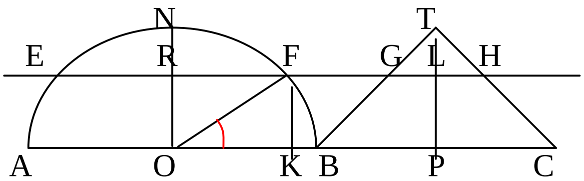
DISCUSSIONE DI PROBLEMI GEOMETRICI RISOLTI PER VIA TRIGONOMETRICA

Problema n°1

Detto B il punto medio del segmento $\overline{AC} = 4r$, nello stesso semipiano disegnare la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$ ed il triangolo isoscele di base $\overline{BC}$ ed altezza r.
Condurre una retta parallela ad AC che incontra in E ed F la semicirconferenza e in G e H i lati del triangolo in modo che risulti:

$$\overline{EF} + \overline{GH} = 4kr \qquad (1)$$



Poniamo $F\hat{O}K = x$ e dal $\triangle OFK$ ricaviamo $\overline{OK} = r\cos x$, $\overline{EF} = 2r\cos x$
e $\overline{FK} = r\, sen\, x$.

Poiché $\triangle GTL$ è rettangolo isoscele si ha: $\overline{GL} = \overline{TL} = \overline{NR} = \overline{NO} - \overline{FK} = r - r\, sen\, x$

Quindi $\overline{GH} = 2r - 2r\, sen\, x$.

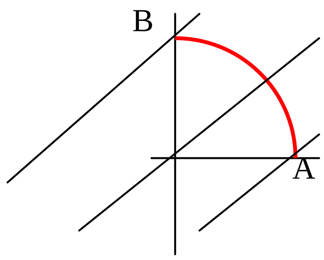
Sostituendo nella (1) otteniamo: $2r\cos x + 2r - 2r\, sen\, x = 4kr$ che fornisce il sistema misto:

$$\begin{cases} \cos x + sen\, x + 1 - 2k = 0 \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

operando le sostituzioni $\cos x = X$ e $sen\, x = Y$ possiamo discutere graficamente il sistema:

$$\begin{cases} X - Y + 1 - 2k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 \le X \le 1 \\ 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Osserviamo che la prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la seconda equazione rappresenta la circonferenza goniometrica e le disuguaglianze rappresentano l'arco di circonferenza che ha come estremi $A(1;0)$ e $B(0;1)$.



- Per determinare il parametro della retta passante per $A(1;0)$ imponiamo l'appartenenza di tale punto nell'equazione del fascio e ricaviamo: $1 + 1 - 2k = 0$ da cui $k = 1$

- Per determinare il parametro della retta passante per B ricaviamo allo stesso modo $k=0$

In conclusione possiamo affermare che il sistema ammette una(*) soluzione ordinaria per $0<k<1$. Ammette una soluzione limite per $k=0$ *e per* $k=1$.

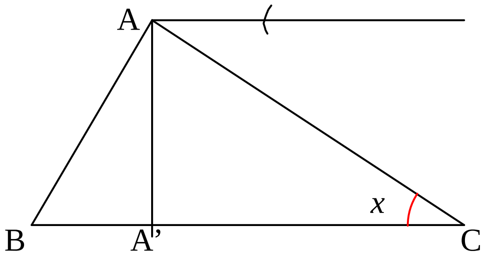
(*)L'arco evidenziato viene intersecato una sola volta dalla generica retta del fascio.

Problema n°2

Nel $\triangle ABC$ l'angolo di vertice B misura 60°. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{C}B=\gamma$ in modo che, detta A' la proiezione ortogonale di A su BC, si abbia:

$$\overline{AB}+\overline{A'C}=\frac{1}{6}k\overline{AC} \qquad (k>0) \qquad\qquad (1)$$

$$\textit{notiamo che per} \quad A\hat{C}B=x\rightarrow\frac{2}{3}\pi \quad C\rightarrow\infty$$



Applicando il teorema dei seni al $\triangle ABC$ si ha: $\dfrac{\overline{AB}}{sen\,x}=\dfrac{\overline{BC}}{sen\,B\hat{A}C}$

e, osservando che $B\hat{A}C=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{2}{3}\pi-x$, si ricava: $\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}\,sen\,x}{sen\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)}$

Otteniamo inoltre, dal triangolo rettangolo ABA' $\overline{AA'}=\overline{AB}\,sen\,60°=\dfrac{\overline{BC}}{sen\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e, dal triangolo rettangolo AA'C $\overline{A'C}=\overline{AA'}\,ctg\,x=\dfrac{\overline{BC}}{sen\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)}\cos x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

quindi $\overline{AC}=\dfrac{\overline{AA'}}{sen\,x}=\dfrac{\overline{BC}}{sen\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Sostituendo nella (1) otteniamo: $sen\,x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{12}k$

Che fornisce il sistema misto:

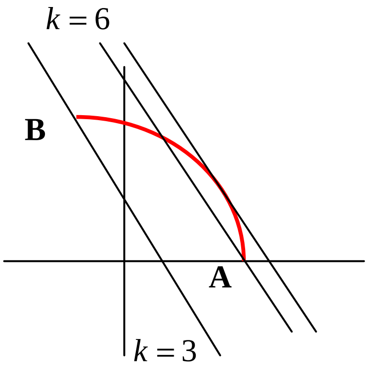
$$\begin{cases} 12\,sen\,x + 6\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\,k = 0 \\ 0 \le x \le \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Operando le sostituzioni $\cos x = X$ e $sen\,x = Y$
possiamo discutere graficamente il sistema:

$$\begin{cases} 6\sqrt{3}\,X + 12\,Y - k\sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -\frac{1}{2} \le X \le 1 \\ 0 \le Y \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un fascio di rette improprio aventi il coefficiente angolare $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

La seconda equazione rappresenta la circonferenza goniometrica e le disuguaglianze rappresentano l'arco di circonferenza che ha come estremi i punti $A(1;0)$ e $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



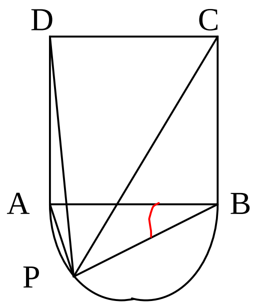
- Per determinare il parametro della retta passante per $A(1;0)$ imponiamo l'appartenenza di tale punto nell'equazione del fascio e ricaviamo: $k = 6$
- Per determinare il parametro della retta passante per B ricaviamo allo stesso modo $k = 3$
- Per determinare la retta tangente alla circonferenza imponiamo la condizione $d = r$ e otteniamo $\left|\frac{-k\sqrt{3}}{\sqrt{108+144}}\right| = 1$ da cui $k^2 = 84;$ $k = \pm 2\sqrt{21}$ (essendo $k > 0$ si accetta solo il valore $k = 2\sqrt{21}$).

In conclusione possiamo affermare che il sistema ammette una(*) soluzione per $3 \le k < 6$. Ammette due(**) soluzioni per $6 \le k \le 2\sqrt{21}$

(*)L'arco evidenziato viene intersecato una sola volta dalla generica retta del fascio.
(**) l'arco viene intersecato due volte dalla generica retta del fascio.

Problema n°3
Assegnato il quadrato ABCD di lato l determinare sulla semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato un punto P in modo che risulti:

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = k\,\overline{AB}^2 \quad (k \in R_0^+) \qquad (2)$$



Ponendo $A\hat{B}P = x$ con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

avremo: $C\hat{B}P = \frac{\pi}{2} + x$ e $D\hat{A}P = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - x$

Dal triangolo rettangolo APB si ricava: $\begin{array}{l} \overline{BP} = l\cos x \\ \overline{AP} = l\,sen\,x \end{array}$ quindi, applicando il teorema di **Carnot** al $\triangle PBC$ risulta:

$$\overline{PC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2 - 2\,\overline{BC}\,\overline{BP}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = l^2 + l^2\cos^2 x + 2l^2 sen\,x\cos x$$

e, applicando lo stesso teorema al $\triangle APD$, si ha:

$$\overline{PD}^2 = l^2 sen^2 x + l^2 + 2l^2 sen\,x\cos x.$$

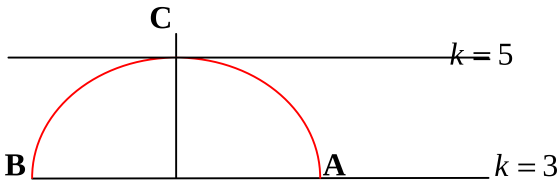
Sostituendo nella (2) si ottiene, dopo semplici passaggi, $4sen\,x\cos x + 3 - k = 0$

che determina il sistema misto $\begin{cases} 2\,sen\,2x = k - 3 \\ 0 \le 2x \le \pi \end{cases}$

Ponendo $\cos 2x = X$ e $sen\,2x = Y$ si ottiene il sistema: $\begin{cases} 2y = k - 3 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1 \\ Y \ge 0 \end{cases}$

Che può essere discusso graficamente.

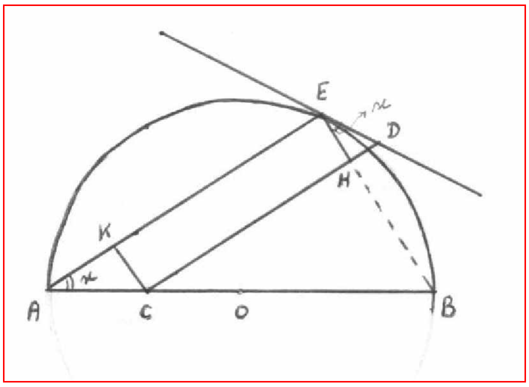
- La prima equazione rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x
- La seconda equazione rappresenta la circonferenza goniometrica
- Le disuguaglianze rappresentano l'arco di circonferenza che ha come estremi i punti $A(1;0)$ e $B(-1;0)$



Si osserva che la retta per A e B si ha per $k=3$ e la retta tangente in C per $k=5$.
Quindi il sistema ammette due soluzioni per $3 \le k \le 5$.

Problema n°4

Data la semicirconferenza di diametro $AB=2r$ e centro O, sia C il punto medio di OA. Determinare sulla circonferenza un punto E in modo che, condotta la tangente t in E alla semicirconferenza e tracciata da C la parallela alla corda AE che incontri t in D, risulti: $CD=kr \quad (k \in \mathbb{R}_0)$ (1).



Ponendo $E\hat{A}B = B\hat{E}D = x$ otteniamo:

$$AE = 2r\cos x; \qquad AK = \frac{r}{2}\cos x$$

Essendo $CK = EH = \frac{r}{2} sen\, x$ si ha:

$$HD = EH\, tg\, x = \frac{r}{2}\frac{sen^2 x}{\cos x}$$

$$CH = KE = AE - AK = 2r\cos x - \frac{r}{2}\cos x$$

$$CD = CH + HD = \frac{3}{2} r\cos x + \frac{1}{2} r \frac{sen^2 x}{\cos x}$$

Sostituendo nella (1) si ha: $\begin{cases} 3\cos^2 x + sen^2 x - 2k\cos x = 0 \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 2k\cos x + 1 = 0 \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

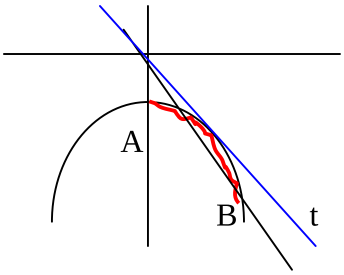
Ponendo $\cos x = X$ $\left(\cos 0 = 1; \quad cos\frac{\pi}{2} = 0 \right)$

Il sistema da studiare sarà: $\begin{cases} 2X^2 - 2kX + 1 = 0 \\ 0 < X \le 1 \end{cases}$

Poiché il parametro è presente solo in "b"[1] poniamo $Y = -2kX$ e otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} Y = -2kX \\ Y = -2X^2 - 1 \\ 0 < X \le 1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un fascio di rette di centro O, la seconda è l'equazione di una parabola avente il vertice nel punto $V(0;-1)$. Le limitazioni forniscono l'arco di parabola che bisogna considerare. Gli estremi di tale arco sono: $A(0;-1)$ e $B(1;-3)$.



Retta per A = asse y $k = \infty$

Retta per B $k = \frac{3}{2}$ La retta tangente t si ha ponendo nell'equazione $2X^2 - 2kX + 1 = 0$ $\frac{\Delta}{4} = 0$ e si ottiene $k = \pm\sqrt{2}$. Da accettare solo il valore positivo perché la retta ha coefficiente angolare negativo.

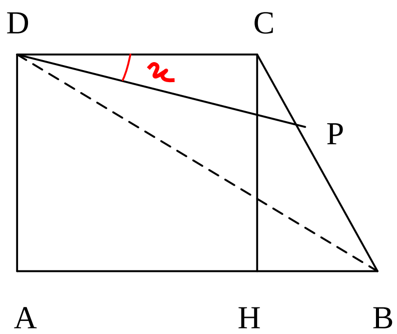
Discussione conclusiva:

Per $k > \frac{3}{2}$ il problema ha una soluzione

Per $\sqrt{2} \le k \le \frac{3}{2}$ il problema ha due soluzioni.

Problema n°5

Un trapezio rettangolo ABCD ha il lato obliquo BC uguale alla base minore CD e l'angolo $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$. Determinare sul lato obliquo un punto Pin modo che si abbia: $DP + CP = k\,DC$.



Poniamo $C\hat{D}P = x$. Essendo $D\hat{C}P = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ e

$C\hat{D}B = C\hat{B}D = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{6}$. Si ha: $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

Applicando due volte il teorema dei seni al triangolo CDP si ottiene: $\frac{DP}{sen\, D\hat{C}P} = \frac{DC}{sen\, D\hat{P}C}$

$$\Leftrightarrow \frac{DP}{sen\frac{2}{3}\pi} = \frac{l}{sen\left[\pi - \left(\frac{2}{3}\pi - x\right)\right]} \Leftrightarrow \frac{DP}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{sen\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

$$DP = \frac{l}{sen\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[1] Vedi il file "sistema misto 1"

$$\frac{CP}{sen\,x}=\frac{DC}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\Leftrightarrow CP=\frac{l}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}sen\,x.$$

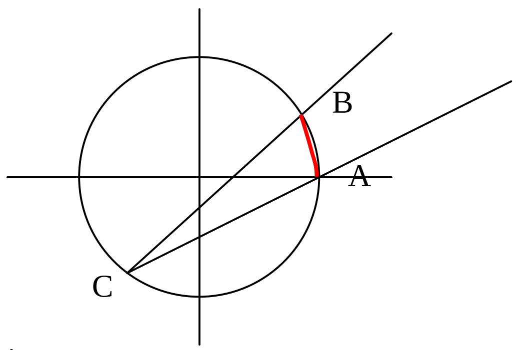
Sostituendo nella relazione assegnata si ha: $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{l}{sen\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}sen\,x=k\,l$

Con semplici calcoli si ottiene il sistema: $\begin{cases}(2+k)\,sen\,x-k\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}=0\\ 0\le x\le\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Ponendo $\cos x=X;\quad sen\,x=Y$ gli estremi dell'intervallo in cui varia x sono: $A(1;0)\quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

Quindi: $\begin{cases}(k+2)Y-k\sqrt{3}X+\sqrt{3}=0 \quad (**)\\ X^2+Y^2=1\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\le X\le 1\\ 0\le Y\le\frac{1}{2}\end{cases}$ la prima equazione rappresenta un fascio di rette proprio avente il centro nel punto C che si ricava dal sistema formato dalle rette basi del fascio

$$\begin{cases}2Y+\sqrt{3}=0\\ Y-\sqrt{3}x=0\end{cases}\Rightarrow C\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Discussione

Mediante l'appartenenza di A e B al fascio (**) ricaviamo che
La retta per A ha $k=1$
La retta per B ha $k=1+\sqrt{3}$
Quindi per $1\le k\le 1+\sqrt{3}$ il problema ha una soluzione.