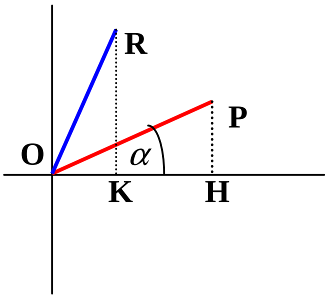
- **<u>ANGOLI ASSOCIATI</u>**

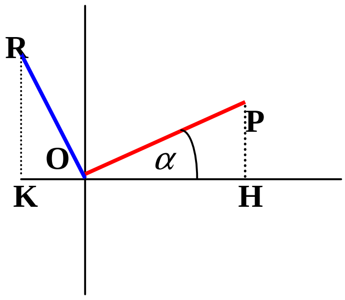
Considerando sempre valida l'uguaglianza tra i triangoli OPH e ORK si ricava quanto segue:

1) Angoli complementari



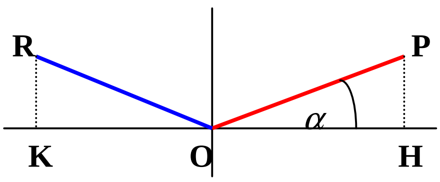
$$\overline{RK} = \overline{OH} \quad sen(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\overline{OK} = \overline{PH} \quad \cos(90^0 - \alpha) = sen\,\alpha$$
$$tg\,(90^0 - \alpha) = ctg\,\alpha$$

2) Angoli che differiscono di 90°



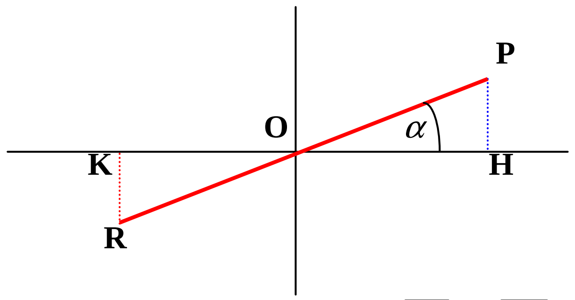
$$\overline{RK} = \overline{OH} \quad sen(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\overline{OK} = -\overline{PH} \quad \cos(90^0 + \alpha) = -sen\,\alpha$$
$$tg\,(90^0 + \alpha) = -ctg\,\alpha$$

3) Angoli supplementari



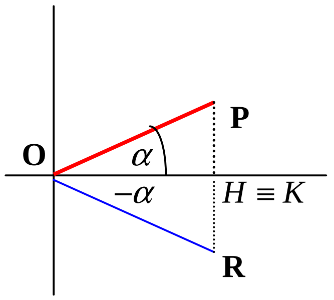
$$\overline{RK} = \overline{PH} \quad sen(180^0 - \alpha) = sen\,\alpha$$
$$\overline{OK} = -\overline{OH} \quad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \textbf{(1)}$$
$$tg\,(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$$

4) Angoli che differiscono di 180°



$$\overline{RK} = -\overline{PH} \qquad sen(180^0 + \alpha) = -sen\,\alpha$$
$$\overline{OK} = -\overline{OH} \qquad \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \textbf{(2)}$$
$$tg(180^0 + \alpha) = tg\,\alpha$$

5) Angoli esplementari (o angoli opposti)



$$\overline{RK} = -\overline{PH} \qquad sen(360^0 - \alpha) = sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$$
$$\overline{OK} = \overline{OH} \qquad \cos(360^0 - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \textbf{(3)}$$
$$tg(360^0 - \alpha) = tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$$

Riduzione al primo quadrante

Se $90^0 < \alpha < 180^0$ si usano le formule (1) relativi agli angoli supplementari

Ad es.

$$sen120^0 = sen(180^0 - 60^0) = sen\,60^0$$
$$\cos 140^0 = \cos(180^0 - 40^0) = -\cos 40^0$$
$$tg\,150^0 = tg(180^0 - 30^0) = -tg\,30^0$$

Se $180^0 < \alpha < 270^0$ si usano le formule (2)

Ad es.

$$sen\,220^0 = sen(180^0 + 40^0) = -sen\,40^0$$
$$\cos 240^0 = \cos(180^0 + 60^0) = -\cos 60^0$$
$$tg\,250^0 = tg(180^0 + 70^0) = tg\,70^0$$

Se $270^0 < \alpha < 360^0$ si usano le formule (3)

Ad es
$$sen\,320^0 = sen\,(360^0 - 40^0) = -sen\,40^0$$
$$\cos 340^0 = \cos(360^0 - 20^0) = \cos 20^0$$
$$tg\,350^0 = tg\,(360^0 - 10^0) = -tg\,10^0$$

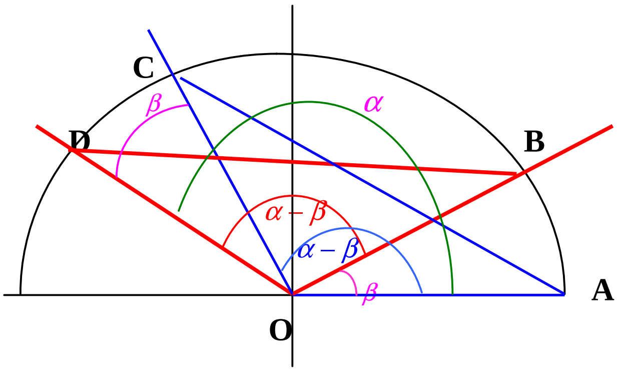
Se $\alpha > 360^0$ si divide l'angolo per 360 e si considera il resto α' di questa divisione

$\alpha = k \cdot 360 + \alpha'$

ad es. se $\alpha = 750^0$ $\alpha = 2 \cdot 360^0 + 30^0$
quindi: $sen\,750^0 = sen\,30^0$

- **<u>FORMULE</u>**

Formule di sottrazione e addizione



I triangoli OAC e OBD sono uguali perché
$$\widehat{COA} = \widehat{DOB} = \alpha - \beta$$
$$OA = OB = OC = OD = 1$$

Quindi $AC = BD$

Osservando che: $A(1;0)$ $B(\cos\beta; sen\beta)$ $C[\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta)]$ $D(\cos\alpha; sen\alpha)$
e che $AC^2 = BD^2$ si ha:

$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + [sen(\alpha-\beta)-0]^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (sen\alpha - sen\beta)^2$ da cui si ricava:

$$\cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + sen^2(\alpha-\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + sen^2\alpha - 2\,sen\alpha\,sen\beta + sen^2\beta \qquad \textbf{(4)}$$

essendo: $\cos^2(\alpha-\beta) + sen^2(\alpha-\beta) = 1$ $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ $\cos^2\beta + sen^2\beta = 1$
la (4) si può scrivere:

$$1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + 1 - 2\,sen\alpha\,sen\beta$$

semplificando e cambiando di segno si ottiene: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\,\alpha\,sen\beta$ **(5)**

poiché $\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$

mediante la (5) si ha: $\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+sen\alpha\, sen(-\beta)$

e, tenendo conto delle (3) si ricava: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\, sen\beta$ **(6)**

Osservando inoltre che: $sen(\alpha-\beta)=\cos\left[90^\circ-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(90^\circ-\alpha\right)+\beta\right]$

applicando la (6) si ha: $sen(\alpha-\beta)=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta-sen(90^\circ-\alpha)sen\beta$

quindi $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\beta$ **(7)**

Poiché $sen(\alpha+\beta)=sen[\alpha-(-\beta)]=sen\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\, sen(-\beta)$

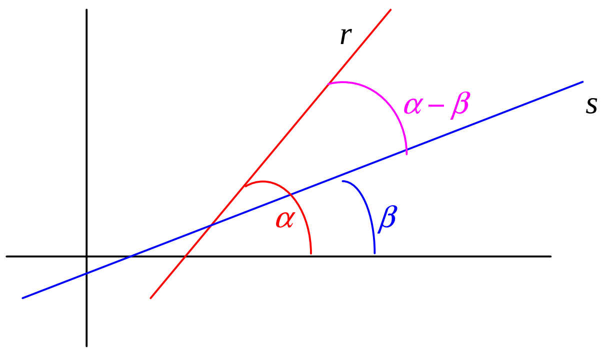
si ricava: $sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\beta$ **(8)**

Dalle considerazioni fatte discende che:

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{sen(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{sen\,\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\, sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp sen\alpha\, sen\beta}$$

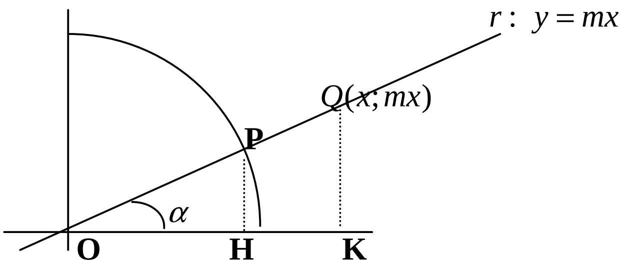
dividendo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ si ha: $tg(\alpha\mp\beta)=\dfrac{tg\,\alpha\mp tg\beta}{1\pm tg\alpha\ tg\beta}$ **(9)**

Tangente dell'angolo formato da due rette



Assegnate le rette $\begin{array}{l} r: \quad y=mx+q \\ s: \quad y=m'x+q' \end{array}$ la tangente dell'angolo da esse formato, per la (9), è dato da: $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{m-m'}{1+m\cdot m'}$ **(10)**

Per dimostrare che $tg\,\alpha=m$ si osservi la seguente figura dove è rappresentata la retta $r:\ y=mx$



Dalla similitudine tra i triangoli OPH e OQK si ha: $\dfrac{PH}{OH}=\dfrac{QK}{OK}=tg\,\alpha=\dfrac{mx}{x}=m$

nota

Se il valore fornito dalla (10) è positivo l'angolo che si è determinato è uno degli angoli acuti formato dalle rette r ed s, se è negativo l'angolo che si è determinato è uno degli angoli ottusi formati dalle stesse rette.

Formule di duplicazione

Si ricavano dalle formule di addizione. Infatti:

$$sen\,2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha sen\,\alpha = 2sen\,\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\,\alpha\, sen\,\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\, tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad = \quad 1-2sen^2\alpha \quad = 2\cos^2\alpha - 1 \\ tg\,2\alpha \; = \; \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \end{cases}$$

Formule di bisezione

Si ricavano dalle formule di duplicazione del coseno.

Poiché $\cos\alpha = \cos 2\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2} \quad \to \begin{cases} \cos\alpha = 1-2sen^2\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 \end{cases}$

dalla prima si ha: $2sen^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha \qquad sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

e dalla seconda: $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha \qquad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

Quindi $tg\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-sen\dfrac{\alpha}{2}}{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}}}$

Formule parametriche razionali

Per le formule di duplicazione possiamo scrivere: $\begin{cases} sen\alpha = sen\,2\dfrac{\alpha}{2} = 2sen\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha = \cos 2\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

Dalla prima si ricava: $sen\,\alpha = \dfrac{2sen\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1} = \dfrac{2sen\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{sen^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$

dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ si ottiene: $sen\,\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

Dalla seconda si ricava: $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2}}{1} = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2}}{sen^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$

dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ si ottiene: $sen\,\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$

Ponendo $tg\dfrac{\alpha}{2} = t$ si ha: $\begin{cases} sen\,\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Formule di prostaferesi
Servono a trasformare la somma o la differenza di due seni o di due coseni in un prodotto di seni e coseni.
Per ottenerle si utilizzano le formule di addizione e sottrazione:

$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, sen\beta$ $\qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\,\alpha\, sen\beta$

$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta - \cos\alpha\, sen\beta$ $\qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\,\alpha\, sen\beta$

sommando membro a membro si ha:

$sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta) = 2sen\,\alpha\cos\beta$ $\qquad \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \qquad (11)$

ponendo $\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases}$ si ricava $\begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$ (12)

quindi

$$sen\,p+sen\,q=2\,sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

sottraendo membro a membro si ha:

$$sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2sen\,\alpha\,sen\beta \quad (13)$$

per le (12) possiamo scrivere:

$$sen\,p-sen\,q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p-\cos q=-2\,sen\frac{p+q}{2}\,sen\frac{p-q}{2}$$

Formule di Werner

Si ricavano dalle (11) e (13)

$$sen\,\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$sen\,\alpha\,sen\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

altri appunti riguardanti le funzioni goniometriche si trovano nelle pagine:
analisi (funzioni 2); **algebra** (equazioni e disequazioni); **funzioni.**

Valori delle funzioni goniometriche di angoli particolari

gradi	radianti	seno	coseno	tangente	cotangente
0°	0	0	1	0	$\pm\infty$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30’	$\frac{\pi}{8}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$

30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
67°30’	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
180°	π	0	-1	0	$\pm\infty$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\pm\infty$	0
360°	2π	0	1	0	$\pm\infty$