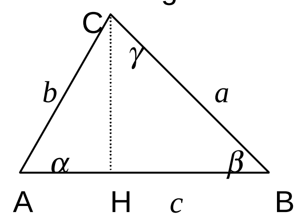
TRIANGOLO QUALUNQUE

Teorema delle proiezioni

- Caso del triangolo acutangolo

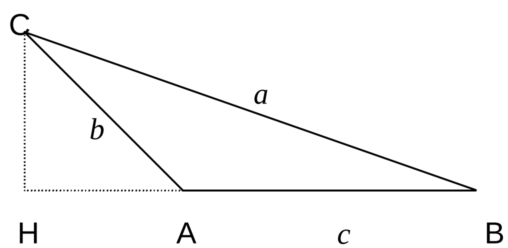


Osserviamo che:

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$ e, per le considerazioni fatte sul triangolo rettangolo, si ha:

$\overline{AH} + \overline{HB} = b\cos\alpha + a\cos\beta$ ovvero $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

- Caso del triangolo ottusangolo



$\overline{AB} = \overline{BH} - \overline{AH} = a\cos\beta - b\cos(\pi - \alpha)$ da cui: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

ed allo stesso modo possiamo dimostrare che:

$$\begin{aligned} b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \end{aligned} \qquad (1)$$

In un qualunque triangolo valgono dunque le uguaglianze (1).

Area di un triangolo

Notando che $A = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} c\, b\, sen\,\alpha$

e

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} ab\, sen\,\gamma \\ A &= \frac{1}{2} ac\, sen\,\beta \end{aligned} \qquad (2)$$

possiamo affermare che
l'area di un triangolo è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso.

Teorema dei seni

Per le (2) $A=\frac{1}{2}ab\,sen\gamma=\frac{1}{2}ac\,sen\,\beta=\frac{1}{2}b\,c\,sen\alpha$

quindi: $\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{a}{sen\alpha}$ e $\frac{c}{sen\gamma}=\frac{b}{sen\,\beta}$

I lati di un triangolo sono direttamente proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Teorema di Carnot

Moltiplicando le (1) rispettivamente per $-c,-b,\ a$ si ha:

$$-c^2=-b\,c\cos\alpha-a\,c\cos\beta$$
$$-b^2=-a\,b\cos\gamma-b\,c\cos\alpha$$
$$a^2=a\,b\cos\gamma+a\,c\cos\beta$$

e, sommando membro a membro, si ricava: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

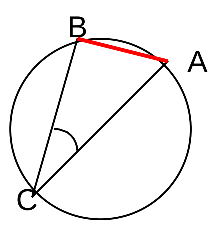
Se, in particolare, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $a^2=b^2+c^2$ come dettato dal teorema di Pitagora.

Notiamo che per risolvere un triangolo qualunque occorre conoscere tre suoi elementi, di cui, uno almeno, lineare.

Teorema della corda

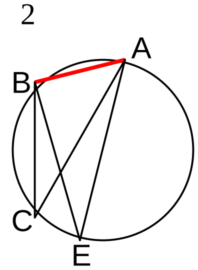
La misura di una corda è data dal prodotto del diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza γ che sottende quella corda.
Distinguiamo i tre casi:

1. $\widehat{ACB}=\gamma=\frac{\pi}{2}$



Per le proprietà dei triangoli rettangoli si ha: $\overline{AB}=2r\,sen\gamma$

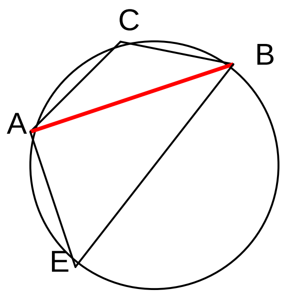
2. $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$



Conduciamo il diametro per A e uniamo E con B. Osserviamo che:

$\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ perché angoli alla di circonferenza che insistono sullo stesso arco.
E, per quanto detto al precedente punto, si ha: $\overline{AB} = 2r\,sen\,\gamma$

3. $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$



Tracciamo il diametro per B e uniamo E con A.
Ricordando che $\widehat{ACB} + \widehat{BEA} = \pi$ perché angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, possiamo scrivere: $\overline{AB} = 2r\,sen\,\widehat{AEB} = 2r\,sen(\pi - \gamma) = 2r\,sen\,\gamma$.

<u>RAGGI</u>

Per determinare **il raggio** r **della circonferenza inscritta** in un triangolo

Da $A = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$ e $A = \frac{1}{2}ab\,sen\,\gamma$

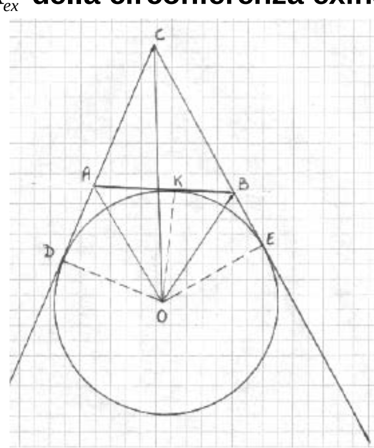
ricaviamo $r = \frac{ab}{a+b+c}sen\,\gamma$

Per ricavare **il raggio** R **della circonferenza circoscritta ad un triangolo**

Osserviamo che $R = \frac{a}{2\,sen\,\alpha}$ e $A = \frac{1}{2}bc\,sen\,\alpha$

quindi: $R = \frac{abc}{4a}$

Ricaviamo, infine, **il raggio** R_{ex} **della circonferenza exinscritta ad un triangolo**



Dall'osservazione della figura deduciamo che: $A_{ABC} = A_{AOC} + A_{COB} - A_{AOB}$

Quindi: $$A_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{OD}+\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OE}-\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OK}$$

Essendo $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OK}=R_{ex}$ e $\overline{AC}=b;\ \overline{BC}=a;\ \overline{AB}=c$ possiamo scrivere:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}(b+a-c)\cdot R_{ex}=\frac{1}{2}(b+a+c-2c)\cdot R_{ex}=(p-c)\cdot R_{ex}$$

da cui si ricava: $$R_{ex}=\frac{A}{p-c}$$

Ed, allo stesso modo, si può dimostrare che:

$$R_{ex}=\frac{A}{p-b}$$

$$R_{ex}=\frac{A}{p-a}$$