Soluzioni della prova n°1

1. $A=\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ 1 & 1 & 1\\ h & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}1 & h & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & h\\ h & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Calcoliamo il determinante della matrice incompleta

$\det A=h^2+h-2$ Poiché il determinante si annulla per $h=-2$ e $h=1$ possiamo dedurre che -------per $h\neq-2$ e $h\neq1$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa $r(A)=r(C)=3$ Il sistema è determinato.

----per $h=1$ e $h=-2$ $r(A)=2;$ $r(C)=3$ il sistema è impossibile

----risolviamo il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss ponendo $h=2$

$\begin{cases}x+2y=1\\ x+y+z=2\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ sottraiamo dagli elementi della seconda riga quelli della prima e otteniamo

$\begin{cases}x+2y=1\\ 0-y+z=1\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ moltiplichiamo gli elementi della prima riga per (–2) e sommiamo alla terza riga

$\begin{cases}x+2y=1\\ 0-y+z=1\\ 0-3y-z=-2\end{cases}$ sommiamo gli elementi della seconda riga a quelli della terza e ricaviamo:

$$\begin{cases}x+2y=1\\ -y+z=1\\ -4y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{4}\\ z=\dfrac{5}{4}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2. Essendo $m=2$ le rette avranno equazioni: $s:\quad y=2(x-4);\quad n:\quad y=-\dfrac{1}{2}(x-4)$

Per determinare i punti B e C risolviamo i sistemi: $\begin{cases}y=2x-8\\ x=0\end{cases}$ e $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+2\\ x=0\end{cases}$

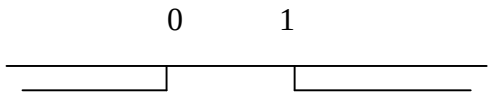
e otteniamo $B(0;-8)$ $C(0;2)$

Imponendo la condizione di appartenenza dei punti A,B,C alla circonferenza

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ otteniamo il sistema: $\begin{cases}2b+c+4=0\\ -8b+c+64=0\\ 4a+c+16=0\end{cases}$ da cui ricaviamo: $\begin{cases}a=0\\ b=6\\ c=-16\end{cases}$

L'equazione della circonferenza è quindi $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0.$

3. $f(x)$ esiste quando $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$



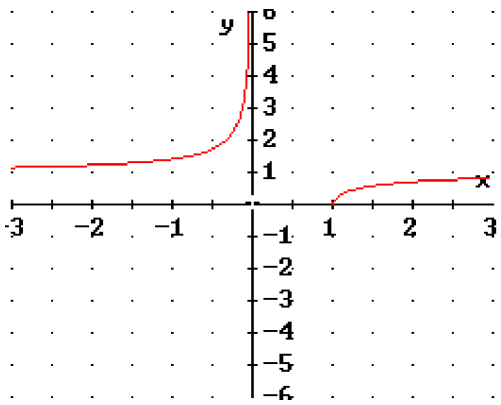
$D =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

Poiché $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie e la funzione possiede l'asintoto verticale $x = 0$

Essendo inoltre $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ la funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 1$

La funzione è sempre crescente nel suo dominio essendo $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\frac{1}{x^2} > 0$

Estremo sup. = $+\infty$
Estremo inf. = 0



4. l'integrale si risolve con il metodo di sostituzione.
Poniamo $x = sen\, t \Rightarrow \quad dx = \cos t\, dt$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sen^2 t}{\cos t}\cos t\, dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{sen\, 2t}{2}\right] + c = \frac{1}{2}\left[t - \frac{2 sen\, t \cos t}{2}\right] + c = (*)$$

essendo $t = arcsen\, x$ e $\cos t = \sqrt{1 - sen^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

$$(*) = \frac{1}{2}\left(arcsen\, x - x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

Soluzioni della prova n°2

1) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & h\\ h-1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & h & 1\\ h-1 & 0 & 1 & h\\ -4 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Calcoliamo il determinante della matrice incompleta $\det A=h^2-h-2$ Poiché questo determinante si annulla per $h=-1$ e $h=2$ possiamo dedurre che per $h\neq -1$ e $h\neq 2$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa $r(A)=r(C)=3$ il sistema è determinato. Per $h=-1$ e $h=2$ $r(A)=2;$ $r(C)=3$ il sistema è impossibile. Risolviamo adesso il sistema con il metodo

di eliminazione di Gauss ponendo $h=3$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3.. & 1\\ 2 & 0 & 1.. & 3\\ -4 & 1 & 0.. & 1\end{pmatrix}$

sommiamo agli elementi della seconda riga quelli della prima e otteniamo

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3.. & 1\\ 0 & 1 & 4.. & 4\\ -4 & 1 & 0.. & 1\end{pmatrix}$$

sommiamo agli elementi della terza riga quelli della prima dopo averli moltiplicati per (-2)

$C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3.. & 1\\ 0 & 1 & 4.. & 4\\ 0 & -1 & -6.. & -1\end{pmatrix}$ sommiamo gli elementi della seconda riga a quelli della terza

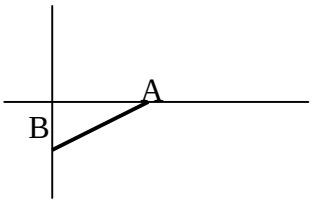
$$C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3.. & 1\\ 0 & 1 & 4.. & 4\\ 0 & 0 & -2.. & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-2x+y+3z=1\\ y+4z=4\\ -2z=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{9}{4}\\ y=10\\ z=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

2) …

poiché le rette r ed s sono perpendicolari deve essere:

$-\dfrac{1-k}{k}\cdot(-2)=-1 \quad\Rightarrow\quad k=2 \quad\Rightarrow\quad s: x-2y-1=0$ per ricavare i punti A e B

consideriamo i sistemi: $\begin{cases}x-2y-1=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow A(1;0)$ $\begin{cases}x-2y-1=0\\ x=0\end{cases} \Rightarrow B\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$



Il semiasse maggiore dell'ellisse è dato da: $AB=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ Ed essendo $c=\dfrac{1}{2}$ ricaviamo $b^2=a^2-c^2=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4}=1$

L'equazione dell'ellisse è quindi: $\frac{4}{5}x^2 + y^2 = 1$

3)

La funzione esiste quando $e^x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$

Quindi $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

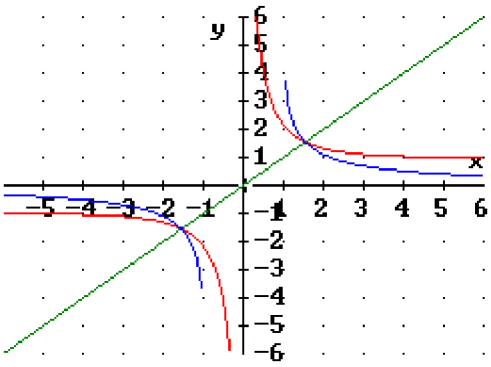
La funzione possiede l'asintoto verticale $x = 0$.

Essendo inoltre $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-1} = -1$ la funzione possiede gli asintoti orizzontali $y = \pm 1$.

La funzione è sempre decrescente infatti $f'(x) = \frac{-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$ è negativa $\forall x \in D_f$

Estremo sup. = $+\infty$

Estremo inf. = $-\infty$.



la funzione è invertibile perché è strettamente decrescente. L'equazione della funzione inversa è: $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$ Essa si ottiene da quella data ricavando x in funzione di y.

Il suo grafico è tracciato in azzurro.

4) Per risolvere l'integrale poniamo $x = t^6 \quad (6 = \min.com.indice)$

E ricaviamo: $\sqrt{x} = t^3; \quad \sqrt[3]{x} = t^2; \quad dx = 6t^5 dt$

Quindi $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\, dt = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$

$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right] + c = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| \right) + c$

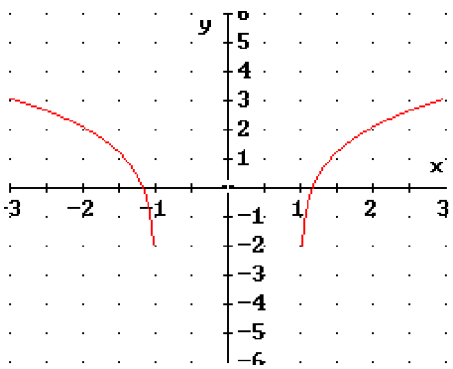
Soluzioni della prova n°3

1. $A=\begin{pmatrix} h & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & h & 2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} h & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & h & 2 & h \end{pmatrix}$ Calcoliamo il determinante della matrice incompleta $\det A = h^2+3h-4$ Poiché questo si annulla per $h=-4$ e $h=1$ possiamo dedurre che per $h\neq -4$ e $h\neq 1$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa $r(A)=r(C)=3$ il sistema è determinato. Per $h=-4$ $r(A)=2;$ $r(C)=3$ il sistema è impossibile. Per $h=1$ $r(A)=r(C)=2$ il sistema è indeterminato, ammette ∞^{3-2} soluzioni $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x=z-2 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z-2 \\ y=5-4z \\ z=z \end{cases}$

2. Mediante il sistema $\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ ricaviamo il centro della circonferenza $C(3;2)$ Poiché la circonferenza è tangente alla retta $x+2y-1=0$ la distanza tra questa retta e il centro è uguale al raggio. $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r=\dfrac{|3+4-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ L'equazione della conica sarà quindi: $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{36}{5}$

3.
La funzione esiste quando $x^2-1>0$ ovvero quando $x<-1 \vee x>1$ Quindi $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ I punti $x=\pm 1$ sono due punti di discontinuità di seconda specie e le rette $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali. $\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty;$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ Inoltre, essendo $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ la funzione è crescente per $x\in]1;+\infty[$ e decrescente per $x\in]-\infty;-1[$

Estremo sup. = $+\infty$
Estremo inf. = $-\infty$.



Per $x=2$ si ha $y=1+\ln 3$

Essendo $m=f'(2)=\dfrac{4}{3}$

l'equazione della retta tangente sarà quindi

$y-(1+\ln 3)=\dfrac{4}{3}(x-2)$

4. risolvendo per parti l'integrale $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x (x-1) + c$ si ha:
$\int \left(sen\, x + x\, e^x \right) dx = -\cos x + e^x (x-1) + c.$

Soluzioni della prova n°4

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h+1 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h+1 & 0 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & h & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il determinante della matrice incompleta $\det A = h^2 - 1$ Poiché questo si annulla per $h = -1$ e $h = 1$ possiamo dedurre che per $h \neq -1$ e $h \neq 1$ il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa $r(A) = r(C) = 3$ il sistema è determinato.

Per $h = 1$ si ha: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2; \quad r(C) = 3$ sistema impossibile.

Per $h = -1$ si ha: $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2; \quad r(C) = 3$ sistema impossibile.

Il sistema è indeterminato quando ammette infinite soluzioni.
Non esistono valori di h per i quali il sistema è indeterminato.

Risolviamo mediante Cramer il sistema quando $h = 2$ $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ essendo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad \det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

si ha: $\begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

2) E' noto che, dal punto di vista della geometria analitica, la conica è una curva che viene rappresentata da una equazione di secondo grado in due variabili del tipo:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (1)$$

e questa è:

una **ellisse** se $\delta > 0$; un'**iperbole** se $\delta < 0$; una **parabola** se $\delta = 0$

avendo indicato con $\delta = ac - b^2$ l'invariante quadratico[1].

Se sviluppiamo l'equazione assegnata otteniamo: $(1+k)x^2 + 2xy + (1+k)y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

che, confrontata con la (1), fornisce $a = 1+k;\quad b = 1;\quad c = 1+k.$

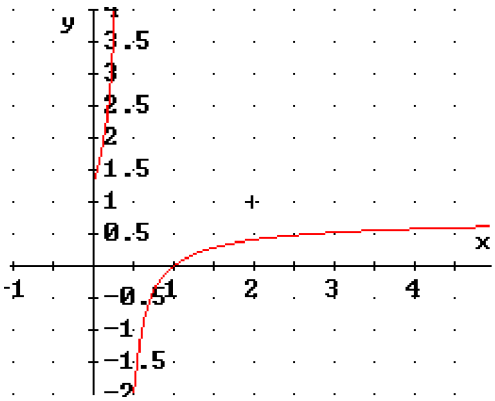
Essendo $\delta = (1+k)^2 - 1 = k^2 + 2k$

la conica sarà un'ellisse quando $k < -2 \quad \vee \quad k > 0$; sarà un'iperbole quando $-2 < k < 0$; sarà una parabola per $k = -2 \vee k = 0$.

3) $f(x)$ esiste quando $\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \neq \dfrac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad D = \left]0; \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$

Il punto $x = \dfrac{1}{e}$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

La funzione possiede l'asintoto verticale $x = \dfrac{1}{e}$.



La funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 1$ infatti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$f(x)$ è sempre crescente nel suo dominio, infatti

$$f'(x) = \frac{1/x}{(1+\ln x)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

4) Se poniamo $tg\, x = t \quad dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$

$\displaystyle\int \frac{\ln tg\, x}{\cos^2 x} dx = \int \ln t \, dt$ che risolto per parti dà:

$$\int \ln t \, dt = t \ln t - \int dt = t(\ln t - 1) + c = tg\, x (\ln tg\, x - 1) + c.$$

[1] Argomento svolto nella pagina di geometria analitica nel settore "coniche"