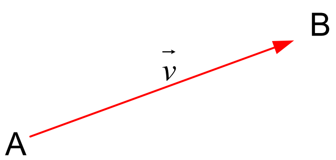
Elementi di calcolo vettoriale

Il vettore è un ente geometrico caratterizzato da una direzione, un verso e un'intensità (modulo).
Mentre il modulo è "dimensionabile", la direzione ed il verso sono elementi geometrici adimensionali.
Le *grandezze* che possono essere rappresentate da vettori si chiamano grandezze *vettoriali* (velocità, forza, momento,...); le grandezze che invece sono rappresentate solamente da un numero reale si dicono *scalari* (temperatura, volume, massa, ...).
Due vettori si dicono:
equipollenti quando hanno la stessa direzione orientata e uguale modulo;
concordi se hanno stessa direzione e stesso verso,
discordi quando hanno stessa direzione e verso contrario,
opposti se sono discordi e hanno uguale modulo.

Per rappresentare un vettore sul piano si usa un segmento frecciato che ha una lunghezza proporzionale alla sua intensità.

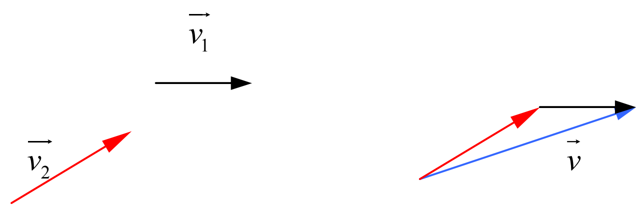


I punti A e B si chiamano rispettivamente origine ed estremo del vettore.
Se il punto A è fisso il vettore si dice applicato in A, se invece A è un qualunque punto della retta r, sostegno di $\vec{v}$, il vettore si dice applicato ad r. Se non è applicato si dice libero.

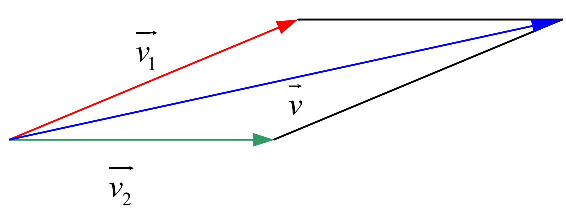
Operazioni con i vettori

- Addizione

Il vettore somma $\vec{v}$ (o vettore risultante) di due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ si determina graficamente ponendo nell'estremo di $\vec{v_1}$ il vettore equipollente a $\vec{v_2}$ come indicato nella figura (1)

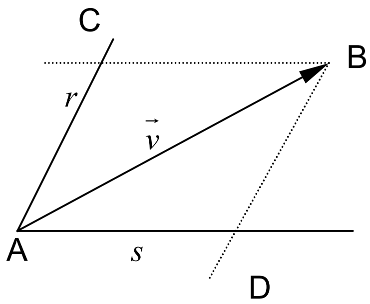


oppure tracciando la diagonale del parallelogramma che ha come lati i vettori dati (regola del parallelogramma).



E' facile verificare graficamente che $\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{v_2}+\vec{v_1}$.

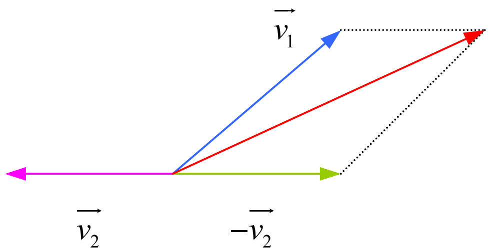
Decomposizione di un vettore secondo due direzioni assegnate



Per determinare i vettori componenti secondo le direzioni r ed s si conducono dall'estremo del vettore le parallele alle rette date fino ad ottenere i punti C e D.

- Sottrazione

Per determinare il vettore differenza $\vec{v}=\vec{v_1}-\vec{v_2}$ basta sommare a $\vec{v_1}$ l'opposto di $\vec{v_2}$ (vedi grafico)

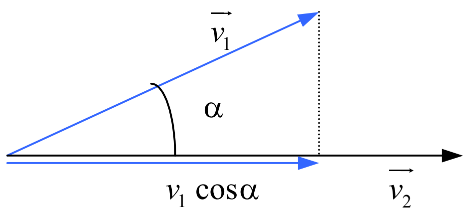


Osserviamo che non vale la proprietà commutativa,infatti: $\vec{v_1}-\vec{v_2}=-\left(\vec{v_2}-\vec{v_1}\right)$

- Prodotto di due vettori

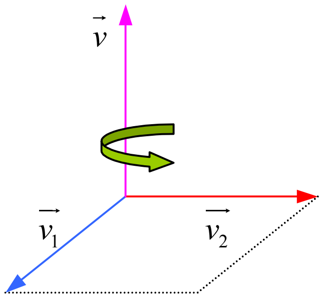
Definiamo *prodotto scalare* dei vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ il prodotto dei loro moduli per il coseno dell'angolo α da essi formato e scriviamo: $\vec{v_1}\bullet\vec{v_2}=v_1\,v_2\,\cos\alpha$

Possiamo anche dire che il prodotto scalare è dato dal modulo del primo (secondo) vettore per la componente del secondo (primo) lungo la direzione orientata del primo (secondo).



Se $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ il prodotto scalare è nullo.

Definiamo *prodotto vettoriale* dei vettori $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e lo indichiamo con $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ il vettore $\vec{v}$ che ha come modulo $v_1 v_2 \, sen\alpha$ (area del parallelogramma di lati v_1 e v_2), come direzione la perpendicolare al piano dei vettori e come verso quello che si ottiene con la regola del pollice della mano destra o della vite.



Il prodotto vettoriale è nullo se i vettori sono paralleli.

- Prodotto di un numero per un vettore

Se moltiplichiamo un numero reale n per un vettore $\vec{v}$ otteniamo un vettore che ha come modulo il prodotto $|n|v$, per direzione la stessa direzione di $\vec{v}$ e come verso quello di $\vec{v}$ se $n > 0$, opposto a quello di $\vec{v}$ se $n < 0$.

In particolare, il prodotto di un vettore $\vec{v}$ per il reciproco del suo modulo viene denominato *versore* di $\vec{v}$ $\left(\frac{1}{v}\vec{v} = \vec{u}\right)$.