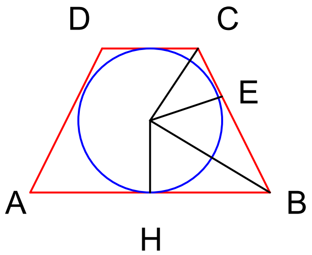
Esercizi

1.



Calcolare il perimetro e l'area del trapezio ABCD circoscritto alla circonferenza di centro O e raggio r sapendo che: $\overline{OB}=\frac{5}{3}r$

Dopo aver osservato che $\overline{BE}=\overline{BH}$ applichiamo il th di Pitagora al $\triangle OHB$

$$\overline{BE}=\overline{BH}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}r\right)^2-r^2}=\frac{4}{3}r$$

(notiamo che $\triangle OBC$ è rettangolo perché $\widehat{ABC}+\widehat{BCD}=180° \quad \Rightarrow \quad \widehat{EBO}+\widehat{ECO}=90°$).

Per il secondo th di Euclide applicato al $\triangle OBC$ si ha: $\overline{OE}^2=\overline{CE}\cdot\overline{BE} \quad \Rightarrow \quad \overline{CE}=\frac{r^2}{\frac{4}{3}r}=\frac{3}{4}r$.

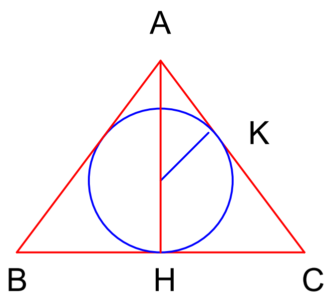
Quindi $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}=\frac{4}{3}r+\frac{3}{4}r=\frac{25}{12}r$.

Poichè sappiamo che un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza quando la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, si ha:

$$2p=2\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)=4\overline{BC}=\frac{25}{3}r.$$

Inoltre, $A=p\cdot a=p\cdot r=\frac{25}{6}r.r=\frac{25}{6}r^2$.

2.



Calcolare il raggio della circonferenza di centro O inscritta nel triangolo isoscele ABC sapendo che $\overline{CK}+\overline{AK}=l; \quad \overline{CK}=\frac{3}{2}\overline{AK}$.

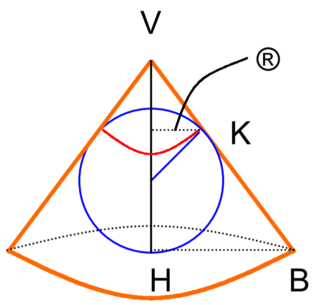
Dai dati ricaviamo $\frac{3}{2}\overline{AK}+\overline{AK}=l; \quad \overline{AK}=\frac{2}{5}l \quad \Rightarrow \quad \overline{CK}=\frac{3}{5}l$

essendo $\overline{CH} = \overline{CK} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}l$

Dalla similitudine dei triangoli AOK e AHC segue che:

$$AK : OK = AH : HC \quad \Rightarrow \quad \overline{OK} = \frac{\frac{2}{5}l \cdot \frac{3}{5}l}{\frac{4}{5}l} = \frac{3}{10}l.$$

3. In un cono circolare retto è inscritta una sfera di centro O. Calcolare la S_t e il volume del cono; il raggio della sfera; il raggio della circonferenza di contatto dei due solidi, sapendo che: $\overline{VH} - \overline{BH} = d$; $\overline{VB} = \frac{5}{4}\overline{VH}$.



Posto $\quad \overline{VH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{VB} = \frac{5}{4}x \quad \Rightarrow \quad \overline{BH} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}x\right)^2 - x^2} = \frac{3}{4}x$

Quindi, $x - \frac{3}{4}x = d$ da cui $x = 4d$; $\overline{VB} = \frac{5}{4}(4d) = 5d$; $\overline{BH} = \frac{3}{4}(4d) = 3d$

$$S_t = \pi r(a+r) = 3d(5d+3d)\pi = 24d^2\pi$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{9d^2 \cdot 4d}{3}\pi = 12d^3\pi.$$

Poiché $\quad \overline{BK} = \overline{BH} \quad \Rightarrow \quad \overline{VK} = \overline{VB} - \overline{BK} = 2d$ per la similitudine tra $\triangle VOK$ e $\triangle VHB$

si ha: $VK : VH = OK : BH \quad \Rightarrow \quad \overline{OK} = \frac{3}{2}d$ e $\overline{VO} = \overline{VH} - \overline{OH} = \frac{5}{2}d$

Il raggio della circonferenza di contatto ® è l'altezza relativa all'ipotenusa del $\triangle VOK$

Quindi, $h_i = \frac{c_1 \cdot c_2}{i} = \frac{\overline{VK} \cdot \overline{OK}}{\overline{VO}} = \frac{6}{5}d.$