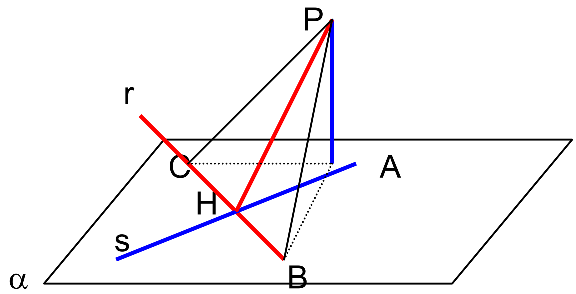
Esercizi

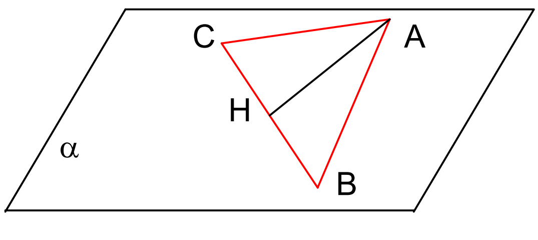
Da un punto P esterno ad un piano α si conduca la $\perp$ PA al piano e la $\perp$ PH ad una qualsiasi retta r di α non passante per A.

a) dimostrare che la retta PH è $\perp$ ad AH



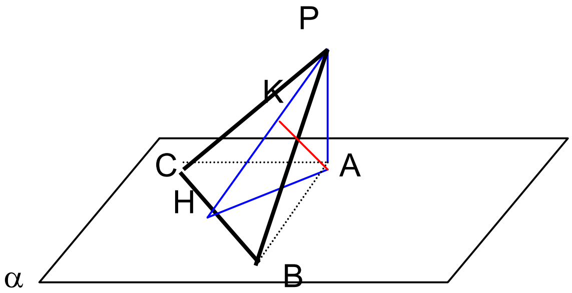
consideriamo due punti B e C equidistanti da H e uniamoli con P. I triangoli PBH e PHC sono congruenti perché sono rettangoli con i cateti corrispondenti congruenti, quindi $\overline{PC} = \overline{PB}$.
Essendo $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ le proiezioni di detti segmenti sul piano α essi stessi risultano congruenti $\overline{AC} = \overline{AB}$.
Il triangolo ABC è isoscele e la mediana AH è anche altezza, quindi $r \perp s$

b) considerare su r due punti B e C tali che $\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{AH}$, dimostrare che $\triangle ABC$ è rettangolo.



Poiché i triangoli AHC e AHB sono isosceli $\widehat{CAH} = \widehat{HCA}$ e $\widehat{BAH} = \widehat{HBA}$
Inoltre, essendo AH bisettrice di $\widehat{BAC}$ i suddetti angoli sono tra loro congruenti e la loro somma vale 180°.Quindi $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 90°$.

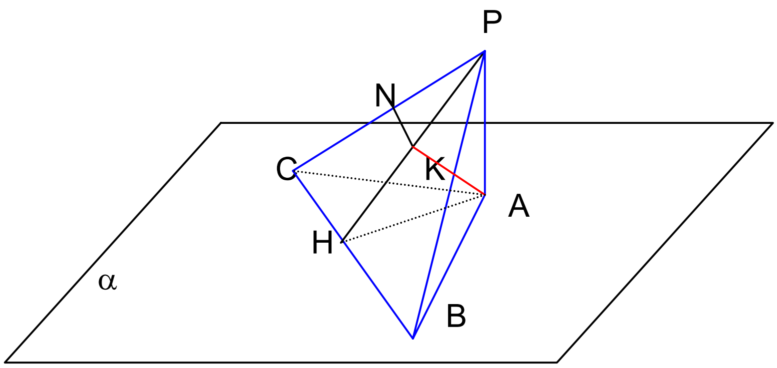
c) sapendo che $\overline{PA} = a$ e che il piano dei punti P, B, C forma un angolo di 30° con il piano α, determinare la distanza di A dal piano PBC.



Poichè il triangolo PAH è la metà di un triangolo equilatero di lato $\overline{PH} = 2a$, $\Rightarrow \overline{AH} = a\sqrt{3}$.
Inoltre,il triangolo AKH è la metà di un triangolo equilatero di lato $\overline{AH} = a\sqrt{3}$, quindi la distanza richiesta è $\overline{AK} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

d) stabilire se la piramide di vertice A e base PBC è retta.

Ricordando che una piramide è retta quando il piede dell'altezza coincide con il centro della circonferenza inscritta nel poligono di base, verifichiamo se il punto K è equidistante dai lati del triangolo PC e BC.



Osserviamo che: $\overline{CH} = \overline{AH} = a\sqrt{3}$; $\overline{PH} = 2a$; $\overline{KH} = \overline{AK}\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$;

$\overline{PK} = 2a - \frac{3}{2}a = \frac{a}{2}$ $\overline{PC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{PH}^2} = a\sqrt{7}$

Dai triangoli simili PNK e PCH ricaviamo:

$NK : PK = CH : PC \quad \Rightarrow \quad \overline{NK} = \frac{a}{14}\sqrt{21}.$

Poiché $\overline{KN} \neq \overline{KH}$ la piramide non è retta.