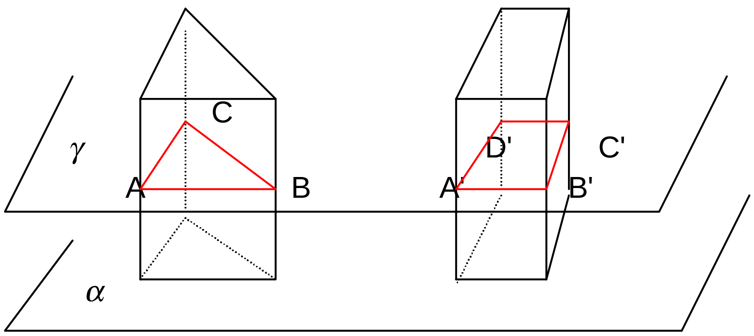
Alcune considerazioni sui solidi

Per stabilire se due solidi sono equivalenti (V_1=V_2) e rendere più semplice la ricerca del loro volume, faremo uso del ….

Principio di Cavalieri

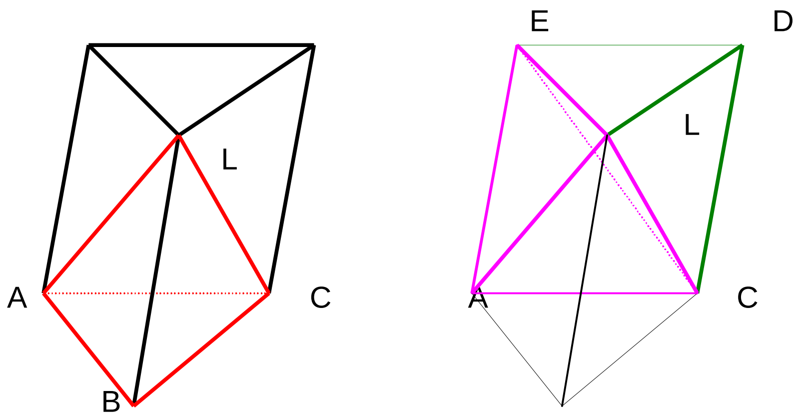
Se due solidi possono essere posti tra due piani paralleli α e β, in modo che le loro sezioni con un qualsiasi piano $\gamma // \alpha$ siano equiestese, sono equivalenti.



i due solidi indicati in figura sono equivalenti perché possono essere pensati come sovrapposizione di uno stesso numero di sezioni tra loro equivalenti.

Applicando il principio di Cavalieri è facile dedurre che
due piramidi aventi basi equivalenti e stessa altezza sono equivalenti (*)

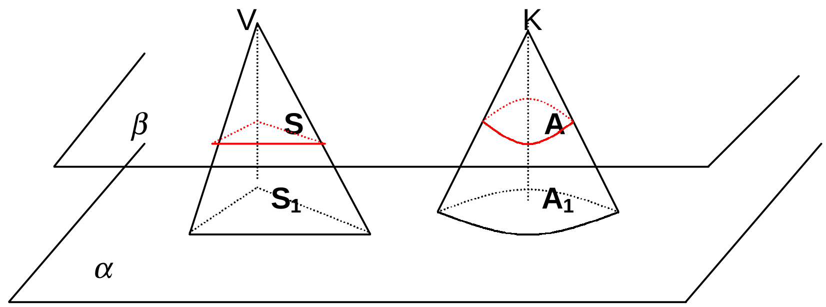
La piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.



Le piramidi LEAC e LECD sono equivalenti perché hanno la stessa base $(EAC \doteq ECD)$ e uguale altezza (distanza di L dalla faccia ACDE).
Osserviamo inoltre che la piramide di vertice L e base ABC è equivalente alla piramide di vertice C e base DEL per la (*).
In conclusione, il prisma è composto da tre piramidi equivalenti.

Quindi: $V_{pir} = \frac{1}{3} V_{prisma} = \frac{1}{3} A_b h$

Un cono e una piramide aventi basi equivalenti e uguale altezza sono equivalenti



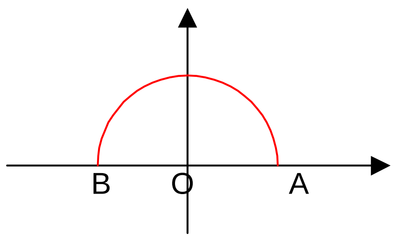
Se chiamiamo con h e h_1 le distanze di K dai cerchi di raggio r e r_1 sappiamo che sussiste la relazione $A : A_1 = h^2 : h_1^2$;
inoltre, le aree delle sezioni parallele di una piramide sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice, $S : S_1 = h^2 : h_1^2$
quindi $A : A_1 = S : S_1$
e per leipotesi fatte $S \doteq A$
Per il principio di Cavalieri i due solidi sono equivalenti. Quindi il volume del cono è dato da $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Sfera

Per determinare il volume di una sfera si può procedere in due modi:

1. si introduce un particolare solido chiamato *scodella di Galileo* (differenza di un cilindro avente $h = r$ e una semisfera di raggio r;
2. si ricorre al calcolo differenziale.

Per motivi grafici è preferibile adoperare in questa sede il secondo metodo.



Ricordiamo che la sfera si ottiene dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al suo diametro.
Poiché l'equazione della circonferenza di raggio r che ha il centro nell'origine degli assi è $x^2 + y^2 = r^2$

Il volume della sfera sarà: $V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2 \right) dx =$

$$= 2\pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_0^r = 2\pi \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$