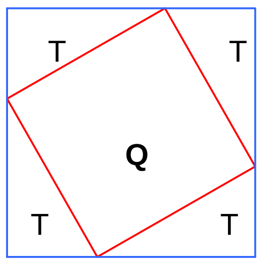
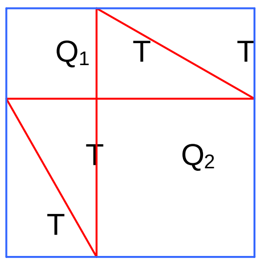
Alcuni teoremi di geometria piana

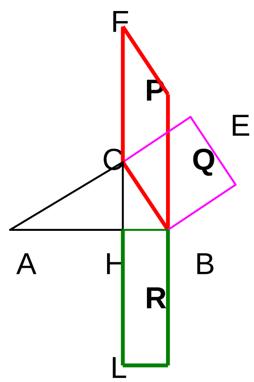
- Th Pitagora





E' evidente che $Q \doteq Q_1 + Q_2$

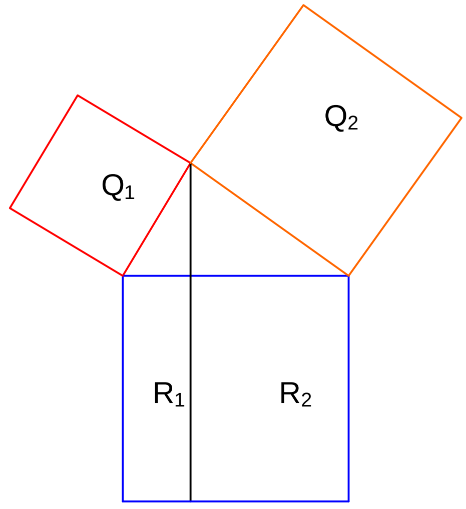
- Primo th Euclide



I quadrilateri **P** e **Q** sono equivalenti perchè hanno la stessa base (BC) e la stessa altezza (CE);i quadrilateri **P** ed **R** sono equivalenti perchè hanno la stessa base (FC=HL) e la stessa altezza (BH), quindi

$Q \doteq R$ da cui $BC^2 = BH \cdot AB(= HL)$ quindi: $BH : BC = BC : AB$

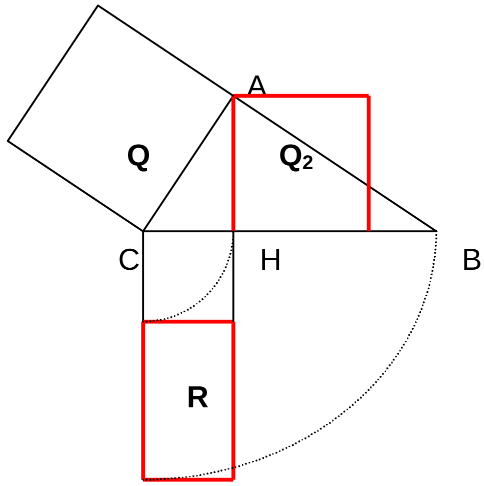
Applicando il primo th di Euclide ai due cateti si dimostra il th di Pitagora. Infatti



$$Q_1 \doteq R_1$$
$$Q_2 \doteq R_2$$

e, sommando membro a membro $Q \doteq Q_1 + Q_2$

- Secondo th di Euclide



Essendo $\begin{array}{l} Q \doteq Q_1 + Q_2 \\ Q \doteq Q_1 + R_1 \end{array}$ si ricava $Q_2 \doteq R$

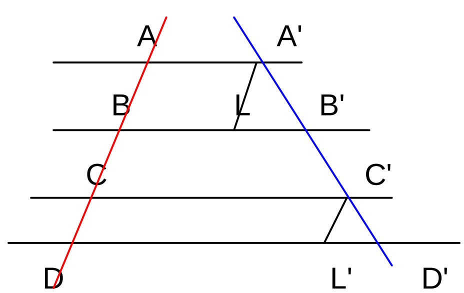
Quindi: $AH^2 = CH \cdot BH \quad \Rightarrow \quad CH : AH = AH : BH$

La proprietà del th di Pitagora era già nota, per particolari casi, agli Assiro-Babilonesi, agli Egizi e agli antichi Cinesi.
Non si conosce il metodo seguito da Pitagora per dimostrare il suo th, però sappiamo che provò la validità della relazione $x^2 + y^2 = z^2$ quando:

$x = n$ (intero dispari) $\quad y = \dfrac{n^2 - 1}{2} \quad z = \dfrac{n^2 + 1}{2}$

ad esempio $\quad x = 7 \quad y = \dfrac{49 - 1}{2} \quad z = \dfrac{49 + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad 49 + 576 = 625$

- Th Talete



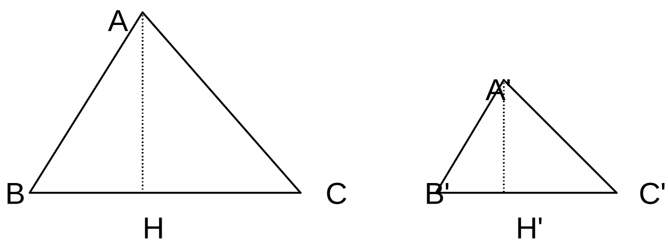
$\triangle A'B'L' \ simile \ \triangle C'D'L' \quad \Rightarrow \dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{A'L}{C'L'}$

ed essendo $\begin{array}{l} A'L = AB \\ C'L' = CD \end{array}$ segue che $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$

In particolare, se $AB = CD \quad \Rightarrow \quad A'B' = C'D'$

Teoremi sui triangoli simili

Il rapporto tra due lati omologhi è uguale al rapporto tra le altezze relative ad essi.



Per la similitudine tra I triangoli $ABC \quad e \quad A'B'C' \qquad AB : A'B' = BC : B'C'$
per la similitudine tra I triangoli $ABH \ e \ A'B'H' \qquad AB : A'B' = AH : A'H'$ quindi:
$BC : B'C' = AH : A'H'$ e generalizzando

$$\boxed{l : l' = h : h'}$$

Il rapporto tra due lati omologhi è uguale al rapporto tra i perimetri.

Per la similitudine tra I triangoli $ABC \ e \ A'B'C'$ si ha: $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$,
applicando la proprietà del comporre otteniamo:
$(AB + BC + AC) : (A'B' + B'C' + A'C') = AB : A'B'$ da cui

$$\boxed{2p : 2p' = l : l'}$$

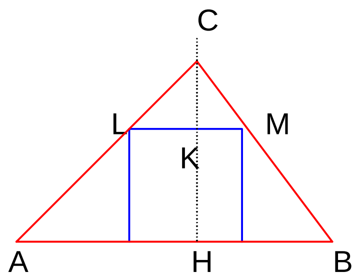
Il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto tra due lati omologhi

poiché $A = \frac{b \cdot h}{2} \ e \ A' = \frac{b' \cdot h'}{2} \qquad \frac{A}{A'} = \frac{bh}{b'h'}$ inoltre $\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'} = k \ (rapporto \ di \ silitudine)$
quindi: $\frac{A}{A'} = k^2$ ovvero

$$\boxed{A : A' = l^2 : l'^2}$$

Esercizi

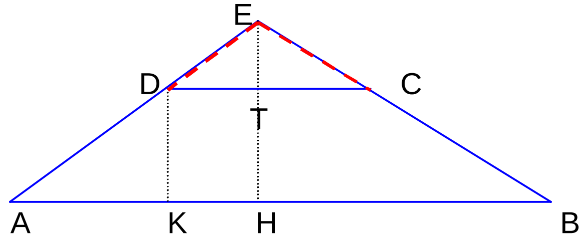
Determinare il lato del quadrato inscritto nel triangolo ABC sapendo che:
$\overline{AB} = a; \quad \overline{CH} = \frac{2}{3}\overline{AB}$



Posto $\overline{LM} = x$, per la simitudine dei triangoli CLM e CAB si ha: $CH : AB = CK : LM$

$$\frac{2}{3}a : a = \left(\frac{2}{3}a - x\right) : x \qquad \text{e componendo} \qquad \frac{5}{3}a : a = \frac{2}{3}a : x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{5}a$$

Calcolare A_{CDE} e A_{BAE} sapendo che le basi e l'altezza del trapezio ABCD misurano rispettivamente $27cm, 12cm\ e\ 5cm$



$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}(27+12)\cdot 5 = 97.50\ cm^2$$

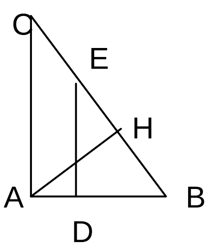
per la simitudine dei triangoli CDE e BAE si ha:

$CD : ET = AB : EH \quad \Rightarrow \quad 12 : ET = 27 : (ET + TH)$ invertendo e componendo si ottiene:

$TH : ET = 15 : 12$ da cui $ET = \dfrac{5\cdot 12}{15} = 4\ cm$

Quindi, $A_{CDE} = \dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 4 = 24\ cm^2$ e $A_{BAE} = 24 + 97,50 = 121,50\ cm^2$

Sapendo che $\overline{AH} = 8,4\ m$; $\overline{AB} = \dfrac{5}{3}\overline{BH}$ determinare $\overline{BD}$ in modo che $A_{BDE} = 24\ m^2$



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo BAH si ha:

$\overline{BH}^2 + 8,4^2 = \left(\dfrac{5}{3}\overline{BH}^2\right)$; $\overline{BH} = 6,3m$ e $\overline{AB} = 10,5m$

Dai triangoli simili BAH e BAC si ricava: $AC : AB = AH : BH$ $\overline{AC} = \dfrac{10,5\cdot 8,4}{6,3} = 14\ m$ e

dai triangoli simili BDE e BAC $BD : DE = AB : AC$.

Osservando che $\overline{DE} = \dfrac{2A_{BDE}}{\overline{BD}} = \dfrac{48}{\overline{BD}}$, si ha: $BD : \dfrac{48}{BD} = 10,5 : 14 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = 6$.