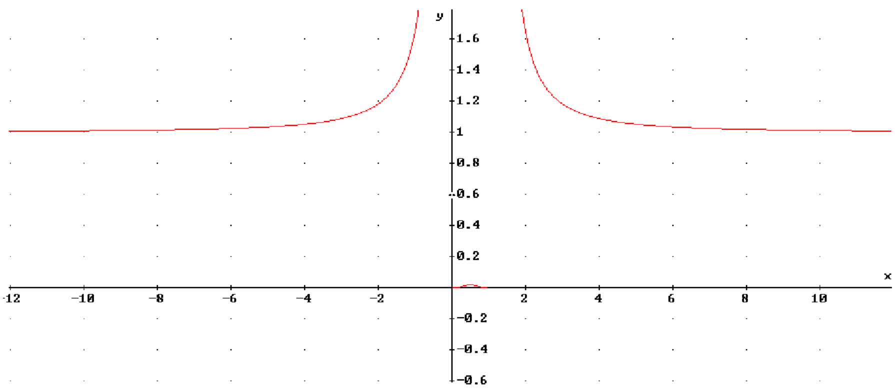
Raccolta 6_06

1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=e^{\frac{1}{x^2-x}}$.
2. Scrivere l'equazione della retta normale alla curva $f(x)=\sqrt{2-x^2}-x$ nel punto di ordinata $y_0=0$.
3. Determinare quando la somma dei quadrati di due numeri reali diversi da zero è minima.
4. Verificare l'uguaglianza $\cos^2(arc\,sen\,x)=1-x^2$
5. Assegnato un segmento $AB=l$ si determini un punto P interno ad AB in modo che la differenza tra l'area del triangolo equilatero ABC e l'area del parallelogramma $CPBD$ sia minima.
6. Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $f(x)=\int_2^x \frac{e^{2t}}{t}dt$ nel punto di ascissa $x=2$.
7. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

Soluzioni

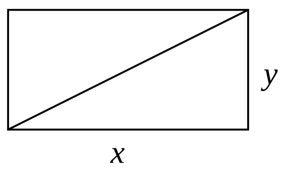
1. $D=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$ La funzione è sempre positiva nel suo dominio e non ha intersezioni con gli assi cartesiani. Essendo $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x(x-1)}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}=+\infty$ e $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x(x-1)}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}=0$ la funzione ha l'asintoto verticale sinistro $x=0$; essendo inoltre $\lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x(x-1)}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}=0$ e $\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x(x-1)}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{+\infty}=+\infty$ la funzione l'asintoto verticale destro $x=1$. Poiché $f'(x)=e^{\frac{1}{x^2-x}}\frac{1-2x}{\left(x^2-x\right)^2}$ la funzione ha un punto di minimo per $x=\frac{1}{2}$.



2. $sen^2(arc\cos x) = 1 - \cos^2(arc\cos x) = 1 - \left[\cos(arc\cos x)\right]^2 = 1 - x^2$

   Osserviamo infatti che $\cos(arc\cos x) = x$

3. Il problema può essere risolto interpretando i due numeri x, y come lati di un rettangolo e andando alla ricerca della diagonale minima di tale rettangolo. Infatti:



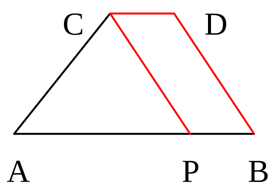
$$d^2 = x^2 + y^2$$

Poiché la diagonale di un rettangolo è minima quando $x = y$ possiamo affermare che la somma dei quadrati di due numeri è minima quando essi sono uguali.

4. Essendo $x_0 = 0$ e $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} - 1 \;\rightarrow\; f'(1) = m_t = -\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; m_n = 2 - \sqrt{2}$

   l'equazione della retta normale sarà $y = \left(2-\sqrt{2}\right)(x-1)$

5.



Posto $PB = x$ si ha $AP = l - x$ $h = \dfrac{l-x}{2}\sqrt{3}$

$A_t = \dfrac{1}{2}(l-x)(l-x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $A_t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(l-x)\,x$ Quindi:

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(3x^2 - 4l\,x + l^2\right)$

$f'(x) > 0 \;\; per \;\; x > \dfrac{2}{3}l$

6. Essendo $f(2) = 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ $m_t = f'(2) = \dfrac{e^4}{2}$ l'equazione della retta tangente è:

   $y = \dfrac{e^4}{2}(x-2)$.

7. $D_f =$ ß Essendo $f(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-1) \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 1$ la curva interseca l'asse x nei punti $x = 0$ e $x = 1$ risulta positiva per $x > 1$. Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ la curva potrebbe presentare l'asintoto obliquo. A tal fine ricaviamo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 1$ e $q = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - \sqrt[3]{x^3} \right)$ ricordando dall'algebra che:

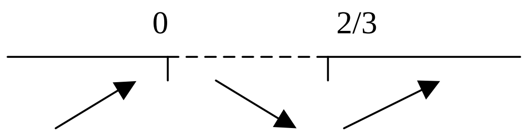
$a \pm b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \pm \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\left(\sqrt[3]{a}\right) + \left(\sqrt[3]{b}\right)\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 « \left(\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{b}\right) + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)$ otteniamo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 - x^2\right)^2} + \sqrt[3]{\left(x^3 - x^2\right)x^3} + \sqrt[3]{\left(x^3\right)^2}} = -\frac{1}{3}$$

La curva possiede quindi l'asintoto obliquo: $y = x - \frac{1}{3}$

Per ricavare gli intervalli in cui la funzione è crescente calcoliamo $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{\left(x^3 - x^2\right)^2}}$

e ricaviamo: $x(3x-2) \geq 0$ Quindi :



Essendo $D_{f'(x)} = ß - \{0\}$ e $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = «\infty$ il punto $x = 0$ è una cuspide a tangente verticale rivolta verso l'alto, mentre $x = \frac{2}{3}$ è un punto di minimo relativo.

Il grafico approssimativo della funzione è il seguente: