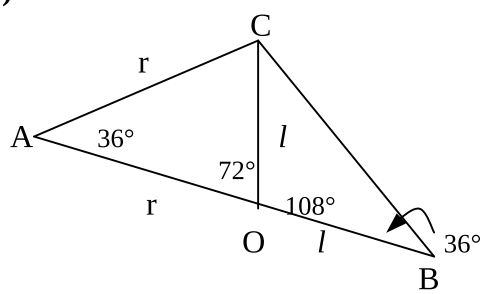
Soluzione dei quesiti

1)



Per la similitudine tra i triangoli ABC e BCD si ha: $\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{OC}$ $\qquad \frac{l+r}{r}=\frac{r}{l}$

$l^2+lr-r^2=0$ da cui: $l=\frac{-r\pm\sqrt{r^2+4r^2}}{2}=\frac{r\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}{2}$

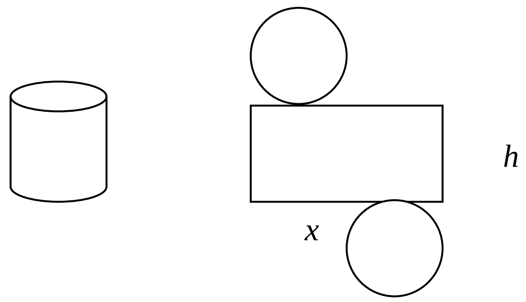
$\frac{l}{r}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\frac{1}{2}\frac{l}{r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=sen18^\circ$ $\qquad cos18^\circ=1-sen^2 18^\circ=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Applicando la formula di duplicazione si ha: $sen36^\circ=sen\,2\cdot 18^\circ=2sen18^\circ\cos18^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2)

$V=0,4l=400cm^3$



$V=\pi r^2 h$ $\qquad V=\pi x^2 h \quad\rightarrow\quad \pi x^2 h=400 \qquad h=\frac{400}{\pi x^2}$

La superficie totale in funzione del raggio è: $S_t(x)=2\pi x^2+2\pi x\frac{400}{\pi x^2}=2\pi x^2+\frac{800}{x}$

Calcoliamo la derivata prima $S_t\,'(x)=4\pi x-\frac{800}{x^2}$ e, dallo studio del suo segno,

ricaviamo: $4\pi x^3-800>0;\quad x>\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$

La superficie è minima quando $x=\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}\approx 3,993..$

3) $y = x\,sen\,x$

- $sen\,x = 1$ conduce a: $x = \frac{\pi}{2}$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

inoltre, essendo $y' = sen\,x + x\cos x$, si ha: $m = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1$

l'equazione della retta tangente sarà: $y - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \quad \to \quad y = x$

- $sen\,x = -1$ conduce a: $x = -\frac{\pi}{2}$ e $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

inoltre, essendo $m = y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

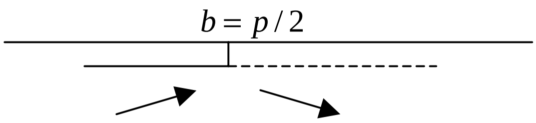
l'equazione della retta tangente sarà: $y + \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \to \quad y = -x$

4).

$h = p - b$

b

$A(b) = b \cdot (p - b) = pb - b^2$ $\qquad A'(b) = p - 2b$ $\qquad b < \frac{p}{2}$



essendo $h = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ il rettangolo di area massima è un quadrato.

5). Il numero $e = 2,71828...$ è un numero trascendente ed è la base dei logaritmi naturali.

$$e = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Utilizzando la definizione di derivata si ha: $\lim_{h \to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x \ln e = e^x.$

6). Si definisce fattoriale di $n \in \mathbb{N}_0$ e si indica con $n!$ il prodotto di tutti i numeri naturali a partire da n, ossia $n! = n\ (n-1)\ (n-2)\ .....3 \cdot 2 \cdot 1$

$n!$ indica le permutazioni di n elementi distinti, ovvero le disposizioni semplici di n elementi presi a "n" a "n". $P_n = D_{n,n} = n\,(n-1)(n-2).....3 \cdot 2 \cdot 1$

Alla frazione $\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ si dà il nome di coefficiente binomiale. Essa viene indicata con il simbolo $\binom{n}{k}$ e si legge "n sopra k".

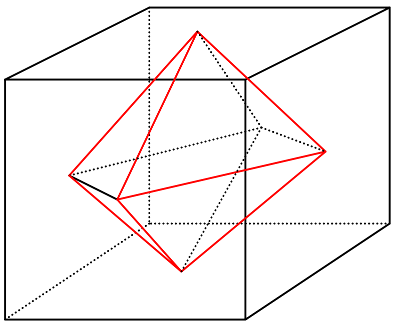
7). $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$

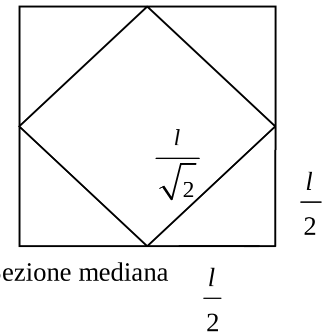
essendo $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4) + 3$ e $f(k) = 2$

si ha: $k^2(k-2)^2 + 1 = 0$ ovvero $[k(k-2)]^2 + 1 = 0$

essendo somma di due quadrati non sarà mai nulla. La funzione non possiede zeri.

8). L'ottaedro è regolare perché le due piramidi contrapposte che lo formano sono rette e a base quadrata.





Sezione mediana

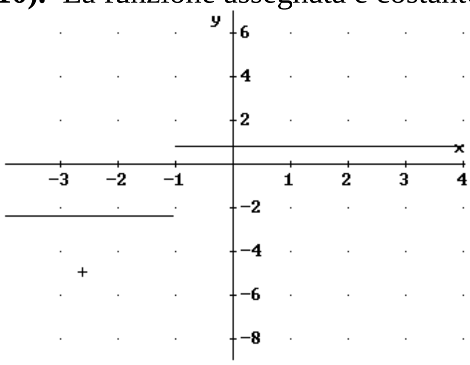
Essendo $V_p = \frac{1}{3} A_b h$ $\quad V_{(ottaedro)} = \frac{2}{3}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{l}{2} = \frac{l^3}{6}$ e $V_{(cubo)} = l^3$

Il rapporto richiesto è: $\frac{V_c}{V_o} = 6.$

9). Ricordando che $sen(90^\circ - \alpha) = cos\,\alpha$ si ha:

$$sen^2 35^\circ + sen^2 55^\circ = sen^2 35^\circ + sen^2(90^\circ - 35^\circ) = sen^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1$$

10). La funzione assegnata è costante a tratti.



infatti,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = cost \quad \forall x \neq -1$$