La pagina dei limiti

Forma $\boxed{0\cdot\infty}$ $\lim_{x\to 1}\ln(1-x)\cdot\ln x$

scriviamo il limite assegnato nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ e applichiamo la regola di De l'Hospital (H)

$$\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln^2 x}{1-x}$$

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$ per cui possiamo ancora applicare (H) e otteniamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\ln^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+2x\cdot\ln x\cdot 1/x}{-1}=0$$

Forma $\boxed{\infty^0}$ $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

Ricordando l'identità $x=e^{\ln x}$ possiamo scrivere: $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}$

poiché il limite dell'esponente è della forma $\frac{\infty}{\infty}$

Applichiamo (H) e otteniamo: $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

Forma $\boxed{1^\infty}$ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Operando come prima si ha:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-tg\,x}{1}}=e^0=1$$

Forma $\boxed{0^0}$ $\lim_{x\to 0^+}x^{sen\,x}$

Trasformando il limite come fatto precedentemente si ha:

$\lim_{x\to 0^+}x^{sen\,x}=\lim_{x\to 0^+}e^{sen\,x\ln x}=e^0=1$ infatti

$$\lim_{x\to 0^+}sen\,x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{sen\,x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{sen^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{sen\,x}{x}\frac{sen\,x}{\cos x}=0$$