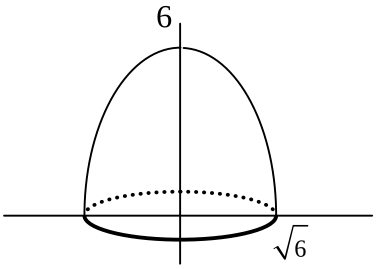
Soluzione problema n° 1

A cura dei proff. :Florio G., Scimone A., Sofia R., Zanghì Vincenzo

1).

La parabola $\lambda: y = 6 - x^2$ ha il vertice nel punto $V(0;6)$, volge la concavità verso il basso, è simmetrica rispetto all'asse y e interseca l'asse x nei punti $A\left(\sqrt{6};0\right)$ e $B\left(-\sqrt{6};0\right)$.

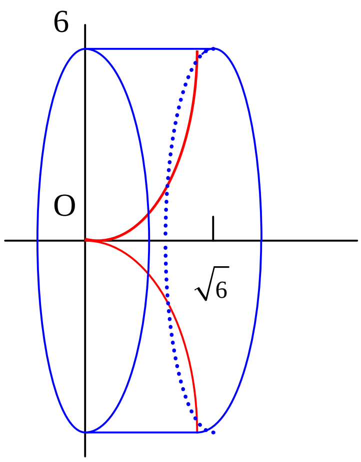


Il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse y è dato da:

$$V = \pi\int_0^6 (6-y)\,dy = \pi\left[6y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^6 = \pi(36-18) = 18\pi$$

2).

Per determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno alla retta $y=6$ operiamo la traslazione $\begin{cases} x \to x \\ y \to y+6 \end{cases}$ e otteniamo: $y+6 = 6-x^2 \quad \to \quad y = -x^2$



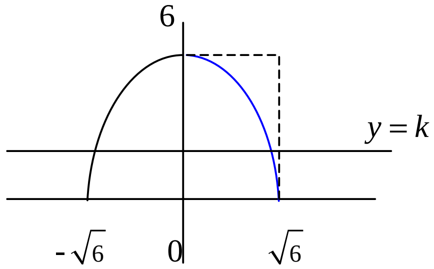
$$V_R = V_{cil} - V_\lambda$$

$$V_{cil} = \pi r^2 h = 36\sqrt{6}\,\pi$$

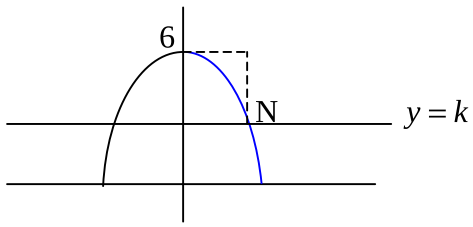
$$V_\lambda = \pi\int_0^{\sqrt{6}} \left(-x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{5}\left[x^5\right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{36}{5}\sqrt{6}\,\pi$$

Quindi: $V_R = \left(36\sqrt{6} - \frac{36}{5}\sqrt{6}\right)\pi = \frac{144}{5}\sqrt{6}\,\pi$

3).



Applicando il teorema di Archimede a metà del segmento parabolico si ha: $A = \frac{2}{3}6\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$



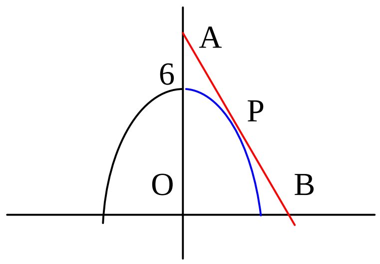
$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = k \end{cases} \to N\left(\sqrt{6-k}; k\right)$$

$\frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = \frac{1}{2}4\sqrt{6}$ da cui si ottiene:

$(6-k)^3 = 54$

$k = 6 + \sqrt[3]{54}; \quad k = 3\left(2 - \sqrt[3]{2}\right)$

4)



Essendo $P\left(t; 6 - t^2\right)$ e $y'(t) = -2t$

la retta t tangente a λ in P ha equazione: $y - \left(6 - t^2\right) = -2t\left(x - t\right)$ da cui $y = -2tx + 6 + t^2$

Determiniamo i punti A e B mediante i sistemi:

$A: \begin{cases} y = -2tx + 6 + t^2 \\ x = 0 \end{cases} \to A\left(6 + t^2; 0\right)$ $B: \begin{cases} y = -2tx + 6 + t^2 \\ y = 0 \end{cases} \to B\left(\frac{6+t^2}{2t}; 0\right)$

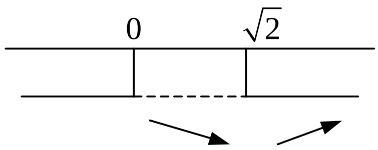
$$A_{AOB} = \frac{1}{2}\frac{6+t^2}{2t}\left(6+t^2\right) = \frac{\left(6+t^2\right)^2}{4t}$$

e, per $t = 1$ $\qquad A = \dfrac{49}{4}$

5)

Studiamo il segno di $\qquad A'(t) = \dfrac{1}{4}\dfrac{2\left(6+t^2\right)2t^2 - \left(6+t^2\right)^2}{t^2}$

$$\frac{6+t^2}{4} \cdot \frac{4t^2 - (6+t^2)}{t^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 6 \geq 0 \quad \rightarrow t \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad t \geq \sqrt{2}$$



l'area è minima per $t = \sqrt{2}$