Soluzione problema n° 2

A cura dei proff. :Florio G., Scimone A., Sofia R., Zanghì Vincenzo

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \qquad per \quad x\geq 0 \end{cases}$$

1).

La funzione è continua per $x=0$ se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\frac{3-2\ln x}{\frac{1}{x^2}}+1\right]$$

applicando il teorema di De l'Hospital si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\frac{-\frac{2}{x}}{\frac{-2}{x^3}}+1\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=1$

Per dimostrare che la $f(x)$ è derivabile per $x=0$ calcoliamo

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2x\left(3-2\ln x\right)+x^2\left(-\frac{2}{x}\right)\right]=2x-2x\ln x$$

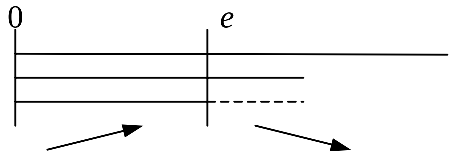
Essendo $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-2x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}2x=0$

La funzione è di classe C1 per $x=0$.

2)

Per dimostrare che l'equazione $f(x)=0$ ha una sola radice reale nell'intervallo $[0;+\infty[$ facciamo le seguenti osservazioni:

$$f'(x)\geq 0 \quad \to 2x(1-\ln x)\geq 0 \to \left|\begin{array}{l} x\geq 0 \\ \ln x-1\leq 0 \quad \to x\leq e \end{array}\right.$$



$f(x)$ ha un massimo nel punto $M\left(e;\frac{1}{2}e^2+1\right)$

inoltre il $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1=-\infty$

Possiamo allora affermare che la funzione:

è crescente e sempre positiva nell'intervallo $0\leq x\leq e$

è decrescente per $x>e$

ha $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$

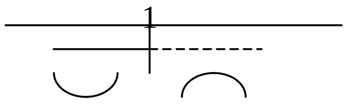
quindi ha una sola radice reale nell'intervallo $[0;+\infty[$

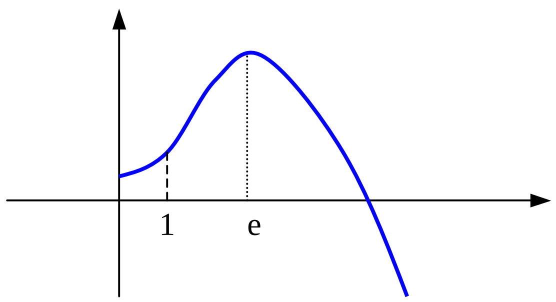
3)

Per tracciare il grafico della funzione studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) = 2 - 2(\ln x + 1)$$

$f''(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad -2\ln x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 1$ la funzione ha un flesso nel punto $F\left(1;\frac{5}{2}\right)$





essendo $f'(1) = 2$, l'equazione della retta tangente nel punto F è: $y - \frac{5}{2} = 2(x-1); \quad y = 2x + \frac{1}{2}$

4)

L'area del dominio assegnato è data da:

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^2\ln x - 2x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{2} - 2\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\, dx$$

Essendo: $\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$ si ha:

$$A_n = \left[\frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{11}{18} - 1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{18}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^3}\ln\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{9}.$$