

## Problema 1

### Punto 1

$$f(x) = 2x - 3x^3$$

La funzione è una cubica dispari definita in tutto  $\mathbb{R}$  e simmetrica rispetto all'origine.

Intersezioni con gli assi

La curva passa per l'origine e interseca l'asse  $x$  nei punti

$$x = 0 \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Studio del segno

$$2x - 3x^3 > 0$$

$$x(2 - 3x^2) > 0$$

$$x > 0$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quindi

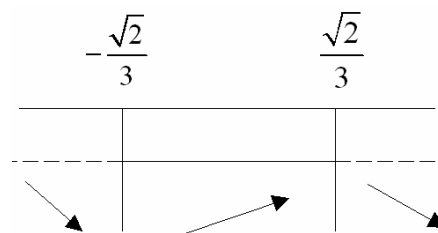
$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad \left] -\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}} \right[ \cup \left] 0; \sqrt{\frac{2}{3}} \right[$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad \left] -\sqrt{\frac{2}{3}}; 0 \right[ \cup \left] \sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty \right[$$

Studio della derivata prima

$$f'(x) = 2 - 9x^2$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad -\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$



la  $f(x)$  ha un minimo per  $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$  nel punto  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$  ed un massimo nel punto

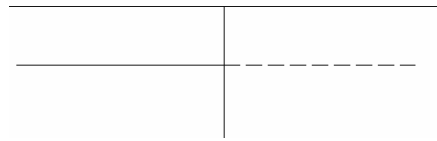
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

Studio del segno della derivata seconda

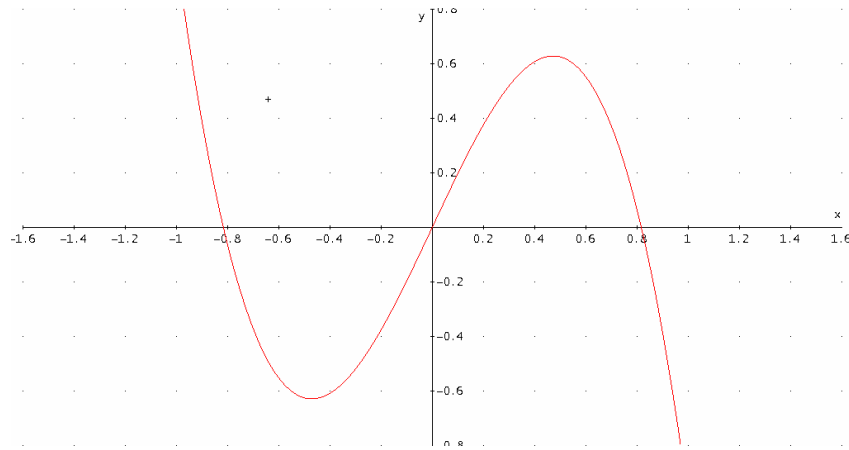
$$f''(x) = -18x$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \leq 0$$

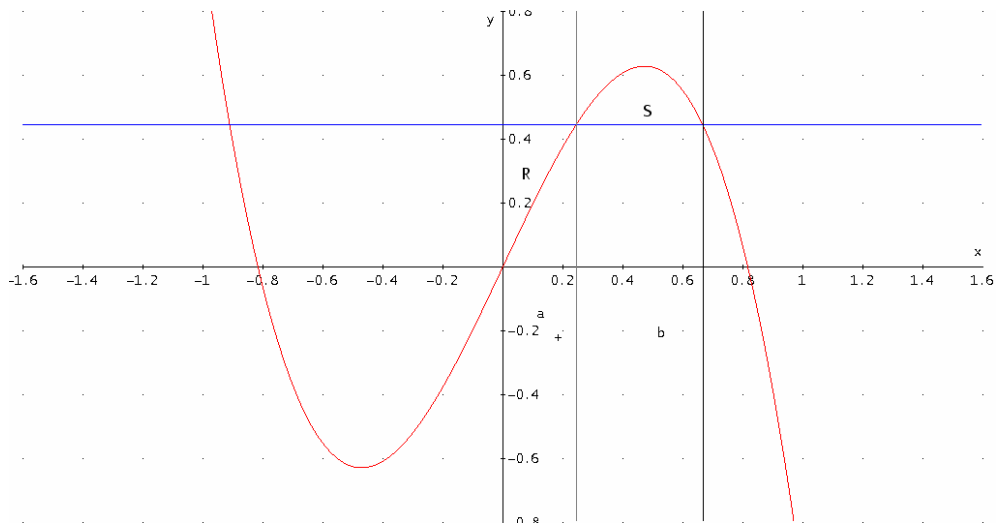
0



ha un flesso nell'origine  
Il grafico sarà quindi



**Punto 2 – 3**



La retta

$$y = c \text{ potrà variare in } \left] 0; \frac{4\sqrt{2}}{3} \right[$$

Siano a e b con  $a, b > 0$  e  $a < b$  le ascisse dei punti di intersezione della cubica con la retta  $y = c$ .

L'area R sarà data da

$$R = \int_0^a [c - f(x)] dx = \int_0^a (3x^3 - 2x + c) dx$$

L'area S è

$$S = \int_a^b [f(x) - c] dx = \int_a^b (2x - 3x^3 - c) dx$$

Poiché  $R = S$  avremo

$$\frac{3a^4}{4} - a^2 + ac = \frac{3a^4}{4} - a^2 + ac - \frac{3b^4}{4} + b^2 - bc$$

Semplificando si ha

$$\frac{b(3b^3 - 4b + 4c)}{4} = 0$$

$$b = 0 \text{ non accettabile}$$

si ha quindi

$$3b^3 - 4b + 4c = 0 \quad (1)$$

poiché  $f(b) = c$  avremo

$$c = 2b - 3b^3 \quad (2)$$

Risolvendo il sistema formato dalle (1) e (2) avremo

$$\begin{cases} 3b^3 - 4b + 4c = 0 \\ c = 2b - 3b^3 \end{cases}$$

$$3b^3 - 4b + 4(2b - 3b^3) = 0$$

$$b(4 - 9b^2) = 0$$

$$b = 0 \text{ non accettabile} \quad \text{e} \quad b = \pm \frac{2}{3}$$

dovendo essere  $b > 0$  avremo  $b = \frac{2}{3}$

Con semplici calcoli otteniamo  $c = \frac{4}{9}$  e quindi  $y = \frac{4}{9}$

Per trovare  $a$  basta risolvere l'equazione  $f(a) = \frac{4}{9}$

$$2a - 3a^3 = \frac{4}{9}$$

$$18a - 27a^3 = 4$$

$$27a^3 - 18a + 4 = 0$$

Mediante il teorema di Ruffini per  $x = \frac{2}{3}$  si ha

$$a = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$$

#### Punto 4

L'equazione della curva simmetrica rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$  sarà

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{8}{9} - y' \end{cases}$$

Con la sostituzione

$$\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow \frac{8}{9} - y \end{cases}$$

otteniamo la funzione  $g(x)$  il cui grafico è simmetrico rispetto

alla retta data.

Si ha

$$y = 2x - 3x^3$$

$$\frac{8}{9} - y = 2x - 3x^3 \quad \text{e quindi}$$

$$y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$$

Il grafico sarà

