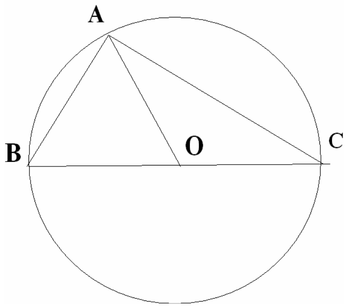
Problema 2

punto 1

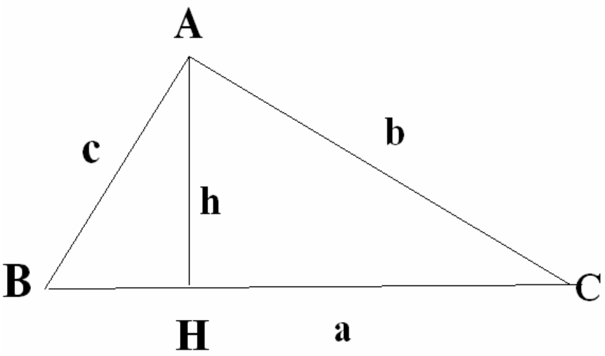
Poiché qualunque triangolo rettangolo è inscrittibile in una semicirconferenza avente come diametro l'ipotenusa, la mediana relativa all'ipotenusa coincide con il raggio della circonferenza.



Pertanto risulta

$$AO = \frac{1}{2} BC$$

punto 2



Poniamo

$BC = a \qquad AH = h$

L'area del triangolo si può esprimere come $\frac{bc}{2}$ od anche $\frac{ah}{2}$ per cui avremo

$$bc = ah$$

Dal teorema di Pitagora si ha

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ bc = ah \end{cases}$$ avremo

$$b = \frac{ah}{c} \qquad (1)$$

e quindi

$$\frac{a^2h^2}{c^2} + c^2 = a^2$$

$$a^2h^2 + c^4 = a^2c^2$$

$$c^4 - a^2c^2 + a^2h^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione avremo

$$c^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^2 - 4a^2h^2}}{2}$$ e quindi

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^2 - 4a^2h^2}}{2}}$$ per la proprietà dei radicali doppi avremo

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a^2 + 2ah}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ah}{2}}\right)$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}\right)$$

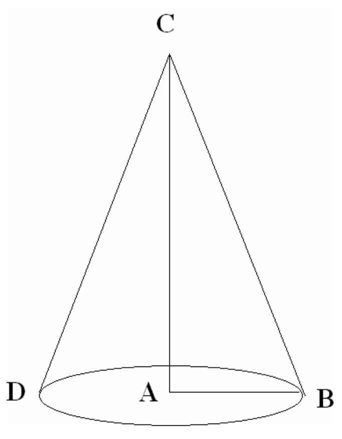
Sostituendo nella (1) otteniamo

$$b = \frac{2ah}{\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}}$$ razionalizzando avremo

$$b = \frac{2ah\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right)}{a^2 + 2ah - a^2 + 2ah} = \frac{2ah\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right)}{4ah}$$ e quindi

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}}{2}$$

punto 3



Si ha $BC = \sqrt{3}$

Ponendo $AB = x$ avremo $AC = \sqrt{3 - x^2}$

con la limitazione $0 < x < \sqrt{3}$

Il volume del cono ottenuto facendo ruotare il triangolo rettangolo ABC attorno ad AC sarà

$$V(x) = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{3 - x^2}$$

La derivata prima sarà

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\left(2x\sqrt{3 - x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{3 - x^2}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2x\left(3 - x^2\right) - x^3}{\sqrt{3 - x^2}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6x - 3x^3}{\sqrt{3 - x^2}}\right)$$

$$V'(x) = \pi \frac{2x - x^3}{\sqrt{3 - x^2}} \geq 0$$

Si ha

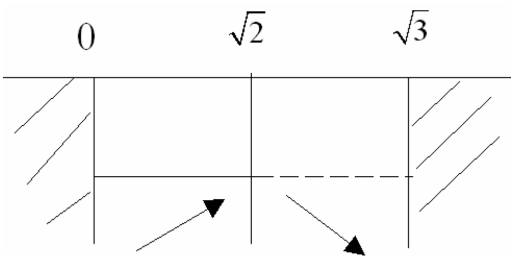
$x(2 - x^2) \geq 0$

$x \geq 0$

$2 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ essendo $0 < x < \sqrt{3}$ avremo

$0 \leq x \leq \sqrt{2}$

e quindi



Il volume sarà massimo per $x = \sqrt{2}$

Il volume massimo sarà quindi

$$V = \frac{2}{3}\pi \qquad \text{(misurato in } m^3\text{)}$$

La misura del volume in litri sarà

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^3 \simeq 2094,4 \qquad \text{(litri)}$$

punto 4

La misura dell'arco del settore circolare ottenuto dallo sviluppo della superficie laterale del cono è

$$l = 2\pi r = 2\pi\sqrt{2}$$

la misura dell'angolo in radianti sarà

$$\alpha = \frac{l}{BC} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6} = 5,16 \ \text{ rad}$$

La misura dell'angolo in gradi è data da

$$\alpha : \pi = \alpha^0 : 180^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^0 = \frac{\alpha \cdot 180^0}{\pi} = \frac{\frac{2}{3}\pi\sqrt{6} \cdot 180^0}{\pi} = 120^0\sqrt{6} = 293,94^\circ = 293^0 56' 20''$$