Problema 1

Punto 1

$\gamma : f(x) = ke^{-\lambda x^2}$ con λ e $k \in \mathbb{R}^+$

Il dominio della funzione è dom $f = \mathbb{R}$

La funzione è pari perché $f(-x) = f(x)$ quindi è simmetrica rispetto all'asse y

Intersezioni con gli assi

Per $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k$

Quindi incontra l'asse y in $(0;k)$ e non possiede intersezioni con l'asse x

Studio del segno

$ke^{-\lambda x^2} > 0$ la funzione è sempre positiva

Condizioni agli estremi

$\lim_{x \to \pm\infty} ke^{-\lambda x^2} = 0$ quindi possiede un asintoto orizzontale di equazione

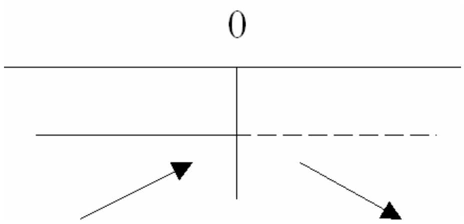
$y = 0$

Studio della derivata prima

$y' = -2k\lambda x e^{-\lambda x^2} \geq 0$ per cui

$-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0$

$e^{-\lambda x^2} > 0$ sempre positiva



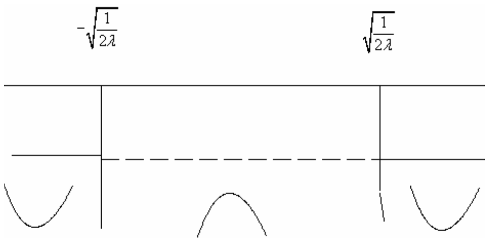
la $f(x)$ ha un massimo nel punto $(0;k)$

Studio del segno della derivata seconda

$y'' = -2k\lambda\left(e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2}\right) = -2k\lambda e^{-\lambda x^2}\left(1 - 2\lambda x^2\right) = 2k\lambda e^{-\lambda x^2}\left(2\lambda x^2 - 1\right) \geq 0$

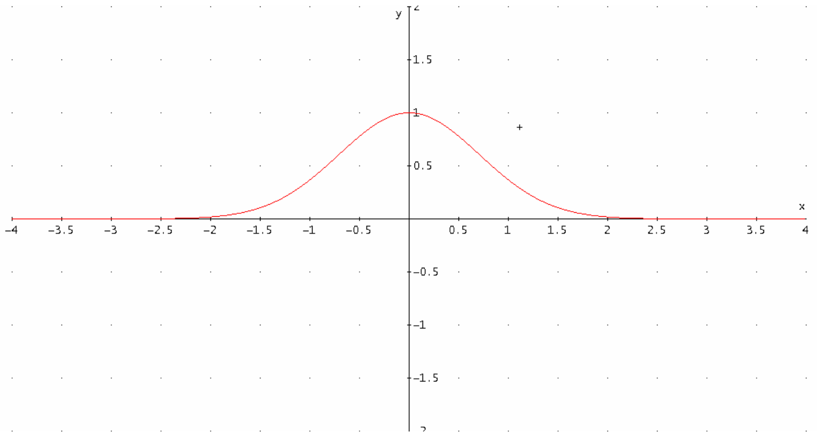
per cui

$2\lambda x^2 - 1 \geq 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$

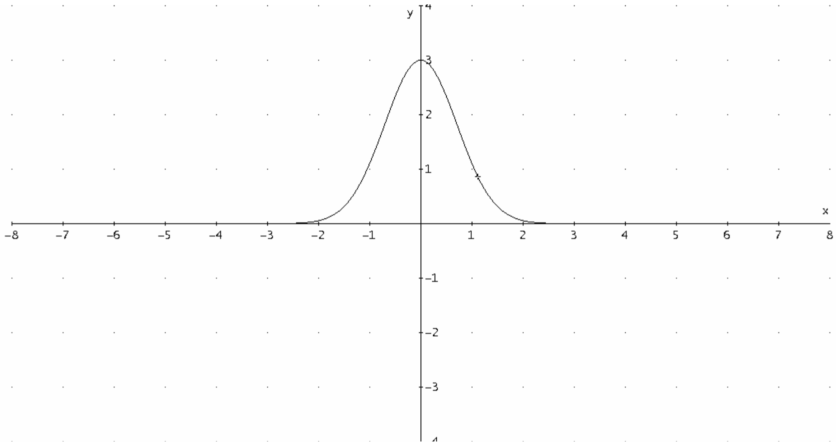


avremo quindi due flessi per $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ nei punti $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right) = ke^{-\lambda\frac{1}{2\lambda}} = ke^{-\frac{1}{2}}$

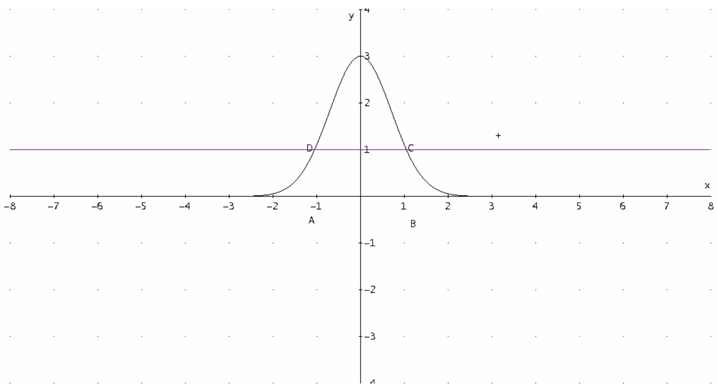
Il grafico approssimato è della forma per $k = 1$; $\lambda = 1$



$k = 3 \quad \lambda = 1$



Punto 2



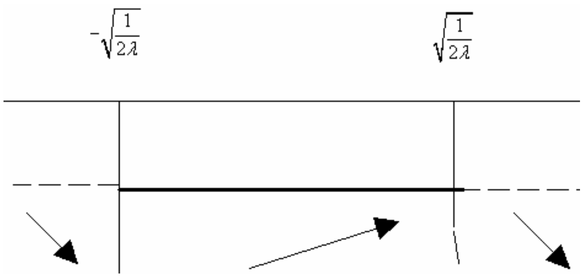
Consideriamo il punto B di ascissa *x*, la sua ordinata sarà $\gamma: f(x) = ke^{-\lambda x^2}$

L'area del rettangolo ABCD sarà

$S = 2kxe^{-\lambda x^2}$

$S' = 2k\left(e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x^2 e^{-\lambda x^2}\right) = 2ke^{-\lambda x^2}\left(1 - 2\lambda x^2\right) \geq 0$ per

$2\lambda x^2 - 1 \leq 0$ cioè per



l'area sarà massima per $x = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ quindi il punto B coincide con il flesso

Punto 3

Calcolo dell'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

L'integrale si può scrivere, essendo simmetrico rispetto all'asse y:

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Poniamo

$$H = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Moltiplicando per se stesso otteniamo:

$$H^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \; = \; H^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

Trasformando l'integrale doppio in coordinate polari (nel primo quadrante) avremo:

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$H^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho$$

Essendo l'integrale un integrale generalizzato (o improprio) si ha:

$$H^2 = \lim_{k \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{k} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho$$

che si può scrivere

$$H^2 = \lim_{k \to +\infty} -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{k} -2e^{-\rho^2} \rho\, d\rho$$

$$H^2 = \lim_{k \to +\infty} -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-\rho^2}\right]_0^k d\vartheta = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-e^{-k^2} + 1\right] d\vartheta$$

$$H^2 = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2} \left[-e^{-k^2} + 1\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

E quindi

$$H^2 = \frac{\pi}{4}$$

Otteniamo pertanto

$$H = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Essendo

$$I = 2H$$

avremo

$$I = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e quindi

$$I = \sqrt{\pi}\ .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

Si tratta di calcolare $k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 1$ Avremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$$

poniamo $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$ $dx = \sqrt{2}dt$

avremo

$$k\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dx = k\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$ e quindi

$$k\sqrt{2\pi} = 1 \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

otteniamo

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Punto 4

In generale avremo

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

se $\mu > 0$ si ha una traslazione nel verso positivo delle ascisse, nel verso opposto se $\mu < 0$.
σ individua una gaussiana più o meno allargata.