Questionario per gli esami di maturità

<u>PRIMA SERIE</u>

1. Determinate il cono retto di massimo volume inscritto in una sfera di raggio R.

2. Verificate che la somma dei cubi di due numeri reali di assegnato prodotto $p > 0$ è minima quando i due numeri sono uguali.

3. Calcolate le misure dei lati di un triangolo rettangolo ABC in funzione della proiezione del cateto minore AB sull'ipotenusa e dell'angolo β ad essa adiacente.

4. Quale triangolo ABC, avente $AC = b, \quad AB = c$ ha area massima?

5. Assegnata la sfera di raggio r determinate il rapporto tra il volume del cubo circoscritto e il volume del cubo inscritto.

Soluzioni

1) Indicando con x la distanza tra il centro della sfera e il centro del cerchio di base del cono si ha:

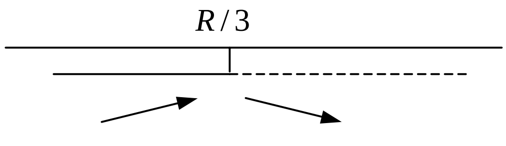
$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - x^2\right)\left(R + x\right)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[-2x\left(R + x\right) + R^2 - x^2\right]$$

da cui, ponendo $V'(x) > 0,$ si ricava: $3x^2 + 2Rx - R^2 < 0$

$$x < \frac{R}{3}$$



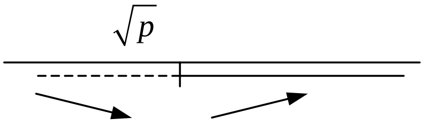
Il cono ha volume massimo per $x = \frac{R}{3}$, ovvero quando la sua altezza è $h = \frac{4}{3}R$

2) posto $S = x^3 + y^3$ con $p = xy > 0$ si ha:

$$S = x^3 + \left(\frac{p}{x}\right)^3$$

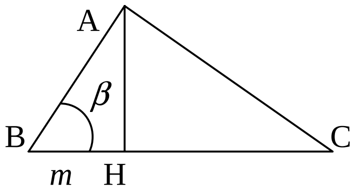
$$S'(x) = 3x^2 - 3\frac{p^3}{x^4}$$

$x^6 - p^3 > 0$



Quindi, la somma è minima per $x = \sqrt{p}$ e $y = \dfrac{p}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}$

3)



posto $BH = m$ si ha:

$$AB = \frac{m}{\cos\beta}\,; \qquad AC = AB\,tg\beta = \frac{m}{\cos\beta}\,tg\beta = \frac{m\,sen\beta}{\cos^2\beta}$$

$$CH = AC\cos\widehat{C} = AC\,sen\beta = m\frac{sen^2\beta}{\cos^2\beta} = m\ tg^2\beta\,; \qquad BC = m + m\,tg^2\beta$$

4) Essendo $A = \dfrac{1}{2}bc\ sen\alpha$ e

$$sen\,\alpha = sen\left[\pi - (\beta+\gamma)\right] = sen(\beta+\gamma)$$

$$A = \frac{1}{2}bc\ sen(\beta+\gamma)$$

osserviamo che l’area è massima quando $\beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ ossia quando il triangolo è rettangolo.

5) Lo spigolo del cubo circoscritto alla sfera è $l_c = 2r$ per cui $V_c = 8r^3$.

Ricordando che la diagonale di un cubo è data da $d = l\sqrt{3}$ ed osservando che il diametro della sfera è uguale alla diagonale del cubo inscritto, si ha:

$$2r = l_i\sqrt{3}\,; \qquad V_i = l_i^3 = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$$

Quindi $\dfrac{V_c}{V_i} = 3\sqrt{3}.$