Quarta prova 2004

1. Verificare che la funzione $f(x)=\sqrt{5+x}$ è invertibile nel suo dominio e determinare la derivata prima della funzione inversa nel punto corrispondente a $x_0=4$

2. Calcolare: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x$

3. Assegnata la funzione $y=3+\sqrt{5x+4}$ dimostrare che $y'(1)=\frac{5}{6}$.

4. Calcolare a e b in modo che la funzione $y=a\ sen\,x+b\cos x$ abbia valore massimo uguale a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ per $x=\frac{\pi}{4}$

5. Calcolare a sapendo che $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}$

Soluzioni

1. Il dominio della funzione è $D=[-5;+\infty)$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5+x}}$ $f'(x)>0 \quad \forall x\in D$
   La funzione assegnata è strettamente crescente ed è quindi invertibile nel suo insieme di esistenza. Poiché $f'(4)=\frac{1}{6}$, risulta: $\varphi'(\vec{4})=\frac{1}{f'(4)}=6$.

2. ponendo $x+2=t$ si ha: $x=t-2;\ \ x+3=t+1$ e
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}=e$$

3. si considera il limite del rapporto incrementale:
   $$\lim_{h\to0}\frac{\left(3+\sqrt{5(x+h)+4}\right)-\left(3+\sqrt{5x+4}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{5(x+h)+4}-\sqrt{5x+4}}{h}$$ razionalizzando si ha: $\lim_{h\to0}\frac{5h}{h\left(\sqrt{5(x+h)+4}+\sqrt{5x+4}\right)}=\frac{5}{\sqrt{5x+4}+\sqrt{5x+4}}$ e, per $x=1$ $f'(1)=\frac{5}{6}$

4. poiché $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$ si ha: $a\frac{\sqrt{2}}{2}+b\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow 3a+3b=2$; inoltre, essendo: $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad a\cos\frac{\pi}{4}-b\ sen\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow a=b$ Risolvendo il sistema $\begin{cases}3a+3b=2\\ a=b\end{cases}$ si ricava: $a=\frac{1}{3}; \quad b=\frac{1}{3}$

5. Ricordando che: $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a}+c$ si calcola $\lim_{k\to\infty}\int_1^k\frac{dx}{x^2+a^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{a}\left[arc\,tg\frac{x}{a}\right]_1^k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{a}\left[arc\,tg\frac{k}{a}-arc\,tg\frac{1}{a}\right]=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-arc\,tg\frac{1}{a}\right)$ Per la condizione assegnata si ha: $\frac{\pi}{2a}-\frac{1}{a}arc\,tg\frac{1}{a}=\frac{\pi}{4a}$ da cui $arc\,tg\frac{1}{a}=arc\,tg\,1\Rightarrow a=1$