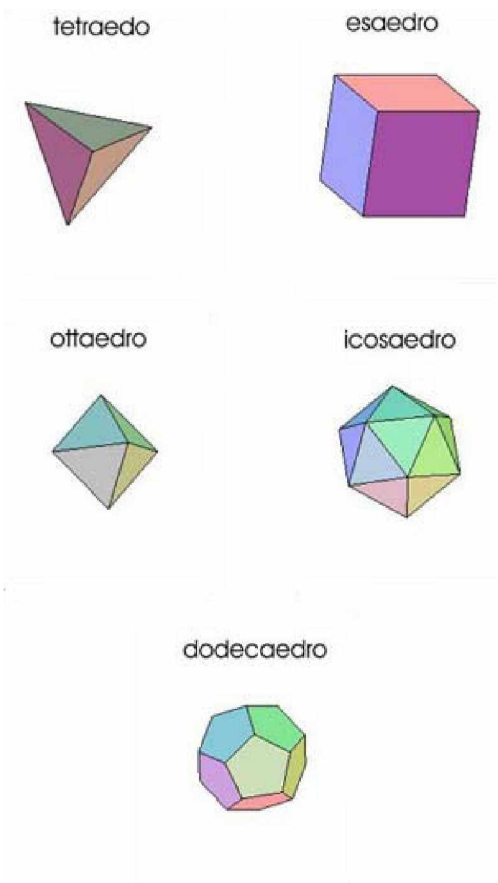
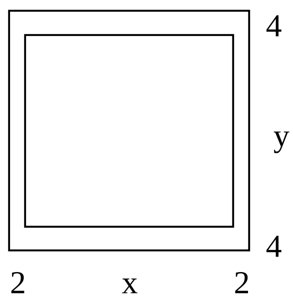
Questionario 2006

1. Il numero totale dei chicchi di grano è dato da: $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{63}$ che è la somma dei primi 64 elementi di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ avente come primo termine l'elemento $a_0 = 1$. Essendo $S_n = a_0 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ si ha: $S_n = 1\dfrac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$
Poiché 1000 chicchi di grano pesano 38 grammi il peso complessivo in tonnellate sarà: $P_{ton} = \left(\dfrac{2^{64} - 1}{1000} \cdot 38\right) \cdot \dfrac{1}{10^6} = \dfrac{2^{64} - 1}{10^9} \cdot 38$ X 701 *miliardi di tonnellate.*



2. I poliedri regolari hanno come facce poligoni regolari congruenti. In ogni vertice del poliedro convergono almeno 3 facce e la somma degli angoli di tali facce è minore di 360^0. --Nel **tetraedro** le facce sono triangoli equilateri e la somma degli angoli che convergono in un vertice è data da $s = 3 \cdot 60^0 = 180^0 < 360^0$; nell'**ottaedro** $s = 4 \cdot 60^0 = 240^0 < 360^0$; nell'**icosaedro** $s = 5 \cdot 60^0 = 300^0 < 360^0$. Nel **cubo** le facce sono quadrati e $s = 3 \cdot 90^0 = 270^0 < 360^0$. Nel **dodecaedro** sono pentagoni e $s = 3 \cdot 108^0 = 324^0 < 360^0$. Se le facce sono esagonali $s = 3 \cdot 120^0 = 360^0$ che è impossibile.

3.



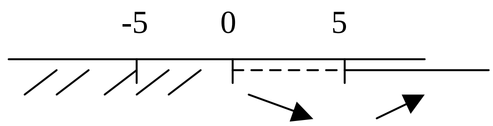
$xy = 50$

$A_{foglio} = (x + 4)(y + 8)$

essendo $y = \dfrac{50}{x}$

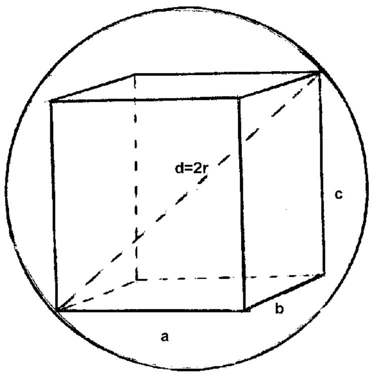
$A(x) = (x + 4)\left(\dfrac{50}{x} + 8\right) = 8x + \dfrac{200}{x} + 82$

$A'(x) = 8 - \dfrac{200}{x^2}$; $A'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{8x^2 - 200}{x^2}$



L'area è minima per $x = 5$

Le dimensioni del foglio sono quindi: 9cm e 18cm.



4. diagonale cubo = diametro sfera=1m

Essendo lo spigolo del cubo $l = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha:

$V = l^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} m^3$. Che equivalgono a

litri $\frac{1000}{3\sqrt{3}}$ X $192,45\,litri$.

5 Ricordando che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ed essendo $(a+b)^n = 2^n$ $a = b = 1$ si ha:

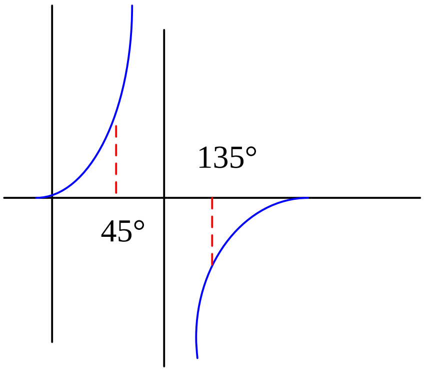
$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ e questa vale $\forall n \in N$

6. Poniamo $2x = t$ e consideriamo il sistema $\begin{cases} \cos t = \frac{5k-2}{k} \\ 30^0 < t < 90^0 \end{cases}$ Poiché $0 < \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$

risolviamo il sistema $\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ e otteniamo $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$

7 La funzione assegnata soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, infatti è continua e derivabile nell'intervallo assegnato.Quindi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{-1}{1} = 3\xi^2 - 4\xi$ da cui otteniamo le soluzioni $\xi = \frac{2 \pm 1}{3}$ accettando solo $\xi = \frac{1}{3}$ che appartiene a $]0;1[$.

8 Dal grafico della funzione $y = tg\, x$ è possibile verificare che non esiste nessun valore di $x \in I$ in cui $f(x) = 0$



Nell'intervallo assegnato la funzione non è continua, presenta infatti un punto di discontinuità di seconda specie in $x = \frac{\pi}{2}$. Pertanto non può valere il teorema degli zeri.

9 La funzione richiesta è $f(x) = e^x$ infatti $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$.

10 Essendo $f'(x) = a\cos x - b\, sen\, x$ e $\begin{cases} f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = a\cos\frac{4}{3}\pi - b\, sen\frac{4}{3}\pi \\ f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = a\, sen\frac{2}{3}\pi + b\cos\frac{2}{3}\pi \end{cases}$

considieriamo il sistema: $\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1 \end{cases}$ e otteniamo: $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$

La funzione $f(x) = \sqrt{3}\, sen\, x + \cos x$ ha periodo $T = 2\pi$.