Raccolta 1_06

1. Determina il punto in cui il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$ ha la tangente perpendicolare all'asse delle ordinate.
2. Determinare il punto della parabola $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x-5$ per il quale è massima la somma delle sue coordinate.
3. Tra le piramidi quadrangolari regolari aventi superficie totale $S=400\,cm^2$ determinare quella di volume massimo.
4. Calcolare $\int \cos^3 x\,dx$
5. Dimostrare che la funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+3 & x\le 0 \\ x^2+4 & 0<x\le 2 \\ 2x+4 & x>2 \end{cases}$ è invertibile
6. Determinare i punti in cui la tangente alla funzione $y=sen\,x+\cos x \quad x\in[0;2\pi]$ è parallela alla retta $r:\ y=x-2$

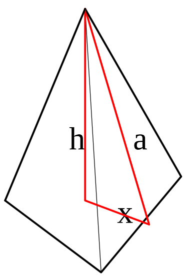
Soluzioni

1) poiché la tangente t è parallela all'asse delle ascisse poniamo $f'(x)=0$ e otteniamo: $\dfrac{(e^x+1)(e^x-x)-(e^x-1)(e^x+x)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}=0$ da cui $x=1;\quad y=\dfrac{e+1}{e-1}$

2) poiché $P\left(x;-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x-5\right)$ $\quad S=x-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x-5 \quad\Rightarrow\quad S=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{7}{2}x-5$

$\Rightarrow\quad S'=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2} \qquad S'>0 \quad per \quad x<7$ Quindi $P\left(7;\dfrac{1}{4}\right)$

3)



Posto $l=2x$ si ha: $S=4x^2+4ax$; quindi $a=\dfrac{S-4x^2}{4x}$ e

$$h=\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\left(\frac{S-4x^2}{4x}\right)^2-x^2}=\sqrt{\frac{S^2-8Sx^2}{16x^2}}.$$

Essendo $V=\dfrac{1}{3}4x^2h$ si ha:

$$V(x)=\frac{4}{3}\sqrt{x^4\cdot\frac{S^2-8Sx^2}{16x^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{S^2x^2-8Sx^4}$$

$$V'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S^2x-32Sx^3}{2\sqrt{S^2x^2-8Sx^4}}$$

$$V'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ -\dfrac{\sqrt{S}}{4} < x < \dfrac{\sqrt{S}}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_{\max} \quad per \quad x = \frac{\sqrt{S}}{4} \text{ ovvero per } x = 5\,cm$$

4) $\int \cos^3 x\,dx = \int \left(\cos^2 x \cdot \cos x\right)dx = \int \left(1 - sen^2 x\right)\cos x\,dx =$

$= \int \cos x\,dx - \int sen^2 x \cos x\,dx = sen\,x - \frac{1}{3} sen^3 x + c$

5) Per dimostrarlo verifichiamo che la funzione è continua e strettamente crescente:

$f(x)$ è continua perché $\lim_{x\to 0^-}\left(e^x + 3\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 + 4\right) \Rightarrow 4 = 4$;

$\lim_{x\to 2^-}\left(x^2 + 4\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(2x + 4\right) \Rightarrow 8 = 8$

$f(x)$ è sempre crescente in D; infatti: $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x > 0 & \forall x \in \left]-\infty; 0\right] \\ 2x > 0 & \forall x \in \left]0; 2\right] \\ 2 > 0 & \forall x \in \left]2; +\infty\right[\end{cases}$

6) Essendo $m_r = 1$ e $y' = \cos x - sen\,x$ poniamo: $\cos x - sen\,x = 1$

E, con semplici calcoli, otteniamo $x_1 = 0;\quad x_2 = \frac{3}{2}\pi;\quad x = 2\pi$