Raccolta 2_06

1. Determinare per quali valori di a e b la funzione $f(x) = a\ln^2 x + b\ln x$ ha un estremo relativo nel punto $P\left(\sqrt{e}; -\frac{1}{4}\right)$
2. Tra tutte le piramidi quadrangolari regolari aventi spigolo laterale uguale a l, determinare quella che ha volume massimo.
3. Determinare gli eventuali asintoti della funzione $f(x) = \frac{e^{-2x}}{2-x} + \frac{x}{2} - 1$
4. Dimostrare che per ogni valore di k la funzione: $f(x) = x^3 - (k+1)x^2 - 3x + 4$ ammette sempre un minimo e un massimo relativo.
5. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ non ammette zeri nell'intervallo $[0;1]$

Soluzioni

1. ..

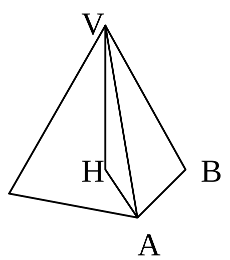
Per l'appartenenza di P possiamo scrivere: $-\frac{1}{4} = a\left(\ln\sqrt{e}\right)^2 + b\ln\sqrt{e} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$

Inoltre, essendo P un estremo relativo, $f'(x_P) = 0$ Quindi:

$$\frac{2a}{x}\ln x + \frac{b}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a}{\sqrt{e}}\ln\sqrt{e} + \frac{b}{\sqrt{e}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b=-1 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

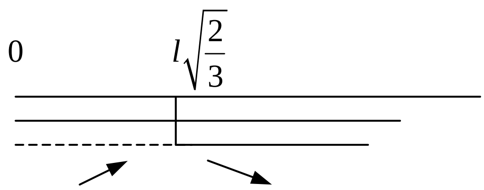
2.



$VA = l; \quad HA = x; \quad AB = \sqrt{2}\,x \qquad VH = h = \sqrt{l^2 - x^2}$

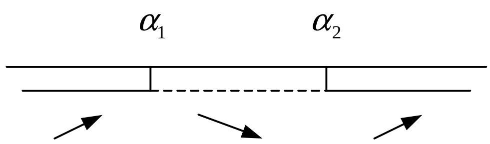
$V(x) = \frac{2}{3}x^2\sqrt{l^2 - x^2} \qquad V'(x) = \frac{2}{3}\left[2x\sqrt{l^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right]$

$V'(x) > 0$ quando $3x^3 - 2l^2 x < 0$



il volume della piramide è massimo quando $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(V = \frac{4}{9\sqrt{3}}l^2\right)$

3. Essendo $D =]-\infty;2[\cup]2:+\infty[$ calcoliamo $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ $q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = -1$ La funzione ha l’asintoto verticale $x = 2$ e l’asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}x - 1$
4. Dallo studio del segno di $f'(x)$ si ottiene: $3x^2 - 2(k+1)x - 3 > 0$ Essendo $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 + 9 = k^2 + 2k + 10$ maggiore di zero $\forall k \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 0$ avrà sempre due soluzioni reali distinte $\alpha_1 ; \alpha_2$, ossia un minimo e un massimo relativo



5. Poiché $f(0) = 2 > 0;$ $f(1) = 3 > 0$ e $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ la funzione , nell’intervallo $[0;1]$, risulta sempre positiva e crescente. Quindi non può intersecare l’asse x.