Raccolta 3_06

1. Calcolare il seguente integrale $\int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx$ e verificare il risultato ottenuto.
2. Dividere un filo di ferro avente lunghezza l in due parti in modo da ottenere con la prima parte un quadrato e con la seconda una circonferenza. Dimostrare che la somma delle aree del cerchio e del quadrato è minima quando il rapporto tra le due parti del filo vale $\frac{\pi}{4}$.
3. Determinare la primitiva di $f(x)=\frac{1}{x+1}$ in modo che $F(0)=1$, $F(-2)=5$.
4. Dimostrare che le curve di equazione γ: $y=\frac{6x-3x^2}{2(x-1)^2}$; γ': $y=4x-2x^2$ sono simmetriche rispetto alla retta di equazione $x=1$. Detti A,B,C,D i punti di intersezione di γ e γ', verificare che il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.
5. Sapendo che la retta $r: \ y=2-x$ è bisettrice dell'angolo avente vertice nel punto $P(1;1)$ e ampiezza 60° determinare le equazioni dei lati dell'angolo.

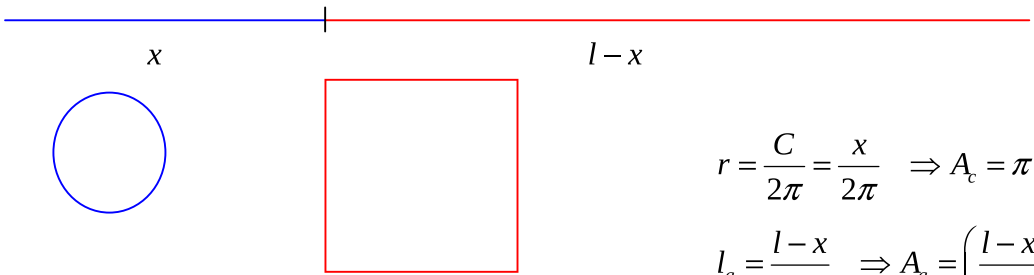
Soluzioni

1. Ponendo $1+e^x=t$ si ricava: $e^x=t-1$; $x=\ln(t-1)$ $dx=\frac{1}{t-1}dt$ Quindi:

   $F(x)=\int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx=\int (t-1)\ln t \frac{1}{t-1}dt=\int \ln t\, dt$ Applicando l'integrazione per parti si ottiene: $\int \ln t\, dt = t\ln t-\int dt = t\left(\ln t-1\right)+c=\left(1+e^x\right)\left[\ln\left(1+e^x\right)-1\right]+c$

   Per effettuare la verifica basta calcolare la derivata del risultato ottenuto.

2.



$$r=\frac{C}{2\pi}=\frac{x}{2\pi} \Rightarrow A_c=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$l_q=\frac{l-x}{4} \Rightarrow A_q=\left(\frac{l-x}{4}\right)^2$$

$$S=A_c+A_q=\frac{1}{4\pi}x^2+\left(\frac{l-x}{4}\right)^2$$

$$S'(x)=\frac{x}{2\pi}-\frac{l-x}{8} \qquad S'(x)>0 \quad x>\frac{\pi l}{4+\pi}$$

$S(x)_{\min}$ *per* $x=\dfrac{\pi l}{4+\pi}$ $$\frac{x}{l-x}=\frac{\frac{\pi l}{4+\pi}}{l-\frac{\pi l}{4+\pi}}=\frac{\pi}{4}.$$

3. Essendo $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+c$ si ha: $F(x)=\begin{cases}\ln(x+1)+c & x>-1\\ \ln(-x-1)+c & x<-1\end{cases}$

Per le condizioni dettate dal problema $\begin{cases}\ln(0+1)+c=1 \quad c=1\\ \ln(2-1)+c=5 \quad c=5\end{cases}$

Quindi: $F(x)=\begin{cases}\ln(x+1)+1 & x>-1\\ \ln(-x-1)+5 & x<-1\end{cases}$

4. ….Per verificare la simmetria rispetto alla retta $r: \; y=2-x$ basta operare la trasformazione $T\begin{cases}x\to 2-x\\ y\to y\end{cases}$ e si ottiene: $y=\dfrac{6(2-x)-3(2-x)^2}{2(1-x)^2}\to y=\dfrac{6x-3x^2}{2(x-1)^2}$

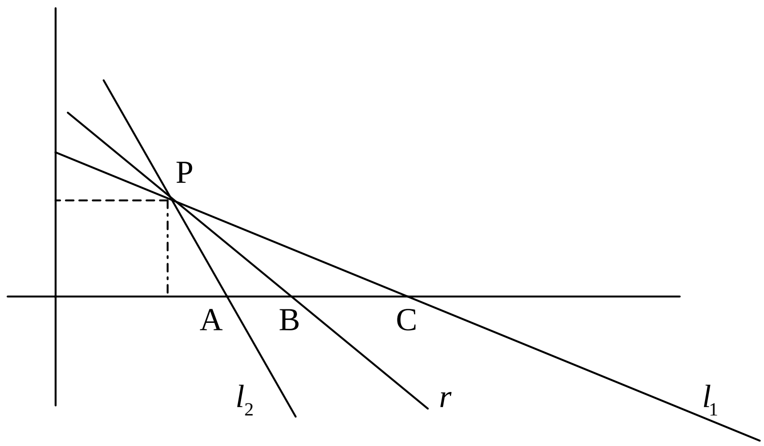
$y=-2(2-x)^2+4(2-x)\to y=-2x^2+4x$

Dal sistema di γ e γ' si ricavano le coordinate dei vertici del trapezio isoscele A,B,C,D che sono:

$A(0;0)$ $B(2;0)$ $C\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ $D\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Poiché gli angoli adiacenti ai lati obliqui sono supplementari e gli angoli adiacenti alle basi sono uguali possiamo affermare che gli angoli opposti del trapezio sono supplementari. Il quadrilatero è quindi inscrivibile in una circonferenza.

5.



$m_r=-1 \quad P\widehat{B}C=135^\circ$

$m_{l_1}=tg165^\circ=\sqrt{3}-2$

$m_{l_2}=tg105^\circ=-\sqrt{3}-2$

Le equazioni dei lati dell'angolo sono quindi:

$l_1: \quad y-1=\left(\sqrt{3}-2\right)(x-1)$

$l_2: \quad y-1=-\left(\sqrt{3}+2\right)(x-1)$