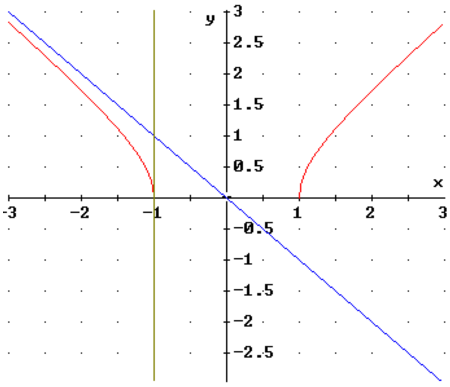
Raccolta 4_06

1. Determinare gli intervalli in cui la funzione $y=\sqrt{x^2-1}+x$ è negativa.
2. Dopo aver verificato che la funzione $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & x\le 0 \\ \dfrac{2}{1+x^2} & x>0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}$ determinare gli asintoti della curva.
3. Qual è la probabilità di ottenere per 3 volte un punteggio maggiore di 5 lanciando un dado per 6 volte.
4. Dopo aver dimostrato che la funzione $y=\dfrac{2-|x|}{x+5}$ non è derivabile in $x=0$, determinare gli asintoti della curva.
5. Stabilire quali sono i punti di discontinuità e la rispettiva specie della funzione $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x+1)}$.

Soluzioni

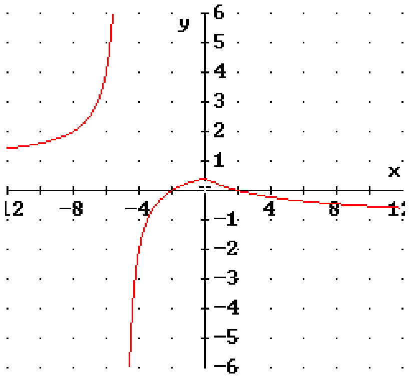
1. Per stabilire gli intervalli in cui la funzione è negativa risolviamo la disequazione $\sqrt{x^2-1}<-x$ con il metodo grafico ponendo: $y=-x$. Poiché $y=\sqrt{x^2-1}$ è una iperbole equilatera e $y=-x$ la bisettrice del II e IV quadrante, ricaviamo dal grafico che:



$$y_{iperbole}<y_{retta} \quad \text{quando} \quad x\le -1$$

2. La funzione è continua perché $\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2}{1+x^2}$ Inoltre, essendo $\lim_{x\to -\infty}\left(e^x+1\right)=0$ e $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2}{1+x^2}=0$ la retta $y=0$ è un asintoto della curva.
3. Facendo riferimento al problema delle prove ripetute di Bernoulli sappiamo che:
$p_{n,k}=\dbinom{n}{k}p^k q^{n-k}$ Essendo $n=6$ $k=3$ $p=\dfrac{1}{6}$ $q=\dfrac{5}{6}$ ricaviamo:
$$p_{6,3}=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{125}{216}=\frac{125}{11664}=0,01....$$

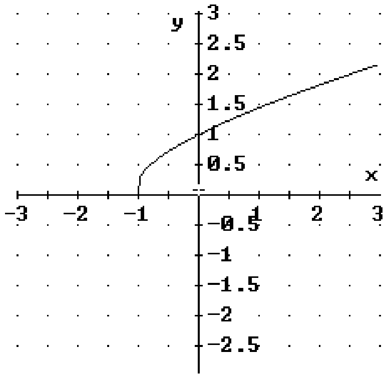
4. Essendo $D_f =]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$ la curva possiede l'asintoto verticale $x=-5$ Inoltre, essendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{x+5} & x \geq 0 \\ \dfrac{2+x}{x+5} & x<0 \end{cases}$ osserviamo che:



$y=-1$ *e* $y=1$
sono asintoti orizzontali per $f(x)$

5. …

La funzione $y = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$ non esiste nei punti $x=0$ *e* $x=-1$ ma possiede limite finito per $x \to 0$ e per $x \to -1$. Questi punti sono quindi punti di discontinuità di seconda specie. Se poniamo $f(0)=1$ e $f(-1)=0$ tali discontinuità.



$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = 1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{\ln(1+x)} = 0$$