Raccolta 5_06

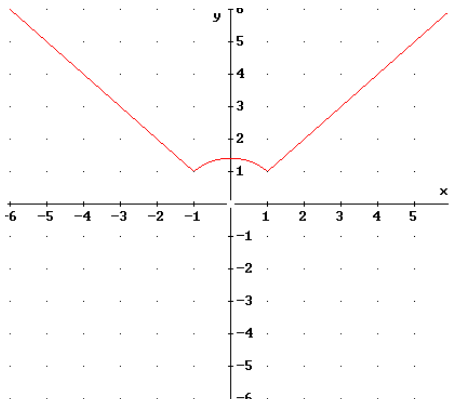
1. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{1+\left|x^2-1\right|}$.
2. Tracciare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{1}{e^x-2}$
3. Calcolare l'integrale: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$.
4. Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
5. Determinare gli asintoti e gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione: $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

Soluzioni

1.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2} & x\le -1 \quad \vee \quad x\ge 1\\ \sqrt{2-x^2} & -1<x<1\end{cases} \qquad y=\sqrt{x^2} \;\rightarrow\; y=|x| \;\rightarrow\; \begin{cases} y=x & x\ge 1\\ y=-x & x\le -1\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0 \quad x<0 \qquad Max\left(0;\sqrt{2}\right)$$

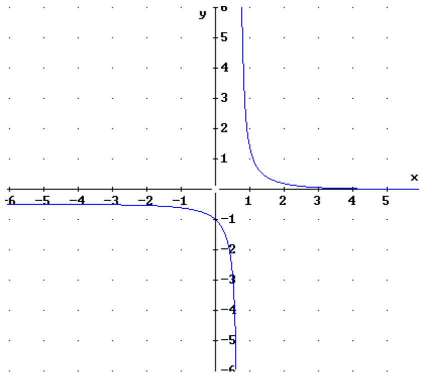


2.

$$D=\left]-\infty;-\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[\qquad f(x)>0 \quad x>\ln 2 \quad \text{Inoltre, per} \quad x=0\rightarrow y=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad y=0 \quad A.Or. \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2} \quad y=-\frac{1}{2} \quad A.Or.$$

Poiché $f'(x)>0 \;\Rightarrow \dfrac{-e^x}{\left(e^x-2\right)^2}>0 \;\Rightarrow e^x<0$ la funzione è sempre decrescente.



3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$

poniamo $x = t^6$ $\quad (m.c.m.(2;3) = 6)$ e otteniamo: $\sqrt{x} = t^3$; $\sqrt[3]{x} = t^2$; $dx = 6t^5 dt$ Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+t^3} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + c =$$

$$= 2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$$

4. Poniamo $x = sen\, t$ e otteniamo: $dx = \cos t\, dt$ Quindi:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{sen^2 t}{\cos t} \cos t\, dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2} sen\, 2t \right) + c = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} sen\, t \cos t + c =$$

$$= \frac{1}{2} arcsen\, x - \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c$$ nota infatti che $t = arcsen\, x$ e $\cos t = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{1-x^2}$

5. La funzione esiste quando $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^{-1} \end{cases}$ Quindi $D = \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Essendo $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ la curva possiede l'asintoto verticale $x = \frac{1}{e}$

Osserviamo inoltre che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ Quindi $y = 1$ è un asintoto orizzontale della curva.

Essendo $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x}\ln x}{(1+\ln x)^2} > 0$ per $x > 0$ la funzione è strettamente crescente nel suo dominio