Terza serie 2004

1. determina i valori di a e b sapendo che: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = a;$ $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = b;$ e $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 5;$ $\int_1^3 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 3.$

2. Determinare per quali valori di k la funzione $y = x^3 - 3mx^2 + 2mx$ ha un massimo e un minimo relativi e quelli per i quali ha un solo punto stazionario.

3. Dopo aver verificato che il teorema di Cauchy è applicabile alle funzioni $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = x^2 - 2x$ nell'intervallo $I = [2;4]$, determinare i punti che verificano il teorema.

4. Determinare i punti singolari della funzione: $y = \frac{x}{|x+1|}$

5. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} arcsen \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

Soluzioni

1. ponendo $t = \frac{x}{2}$, $x = 2t;$ $dx = 2\,dt$ si ha: $\begin{matrix} per & x=0 & t=0 \\ per & x=1 & t=\frac{1}{2} \end{matrix}$ quindi

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = 2a \qquad 2a = 5$$

Operando allo stesso modo, si ottiene:

$$\int_1^3 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt = 2\left(\int_0^{\frac{3}{2}} f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt\right) = 2(b-a); \qquad 2(b-a) = 3$$

Il sistema $\begin{cases} 2a = 5 \\ 2(b-a) = 3 \end{cases}$ fornisce $\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 4 \end{cases}$

2. calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno: $y' = 3x^2 - 6mx + 2m$
$\frac{\Delta}{4} = 9m^2 - 6m > 0$ quindi, per $m < 0 \quad \vee \quad m > \frac{2}{3}$ la funzione ha due estremanti. Per $0 \le m \le \frac{2}{3}$ presenta un flesso a tangente orizzontale.

3. $f(x) \quad e \quad g(x)$ sono derivabili in I infatti $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}; \quad g'(x) = 2x - 2 \neq 0 \ \forall x \in I$
Inoltre: $f(b) - f(a) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}; \quad g(b) - g(a) = 8 - 0 = 8$
Quindi $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Rightarrow \quad \frac{-\frac{2}{3}}{4} = \frac{-\frac{1}{(c-1)^2}}{2(c-1)}$ e si ricava:
$(c-1)^3 = 6; \quad c = \sqrt[3]{6} + 1$

4. $x + 1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge -1$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & per\ x \ge -1 \\ -\frac{x}{x+1} & per\ x < -1 \end{cases}$ Essendo:
$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{-x}{x+1} = +\infty \quad x = -1$ è un punto di discontinuità di 2ª specie.

5. $\lim_{x \to +\infty} arcsen \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} arcsen \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = arcsen(-1) = \frac{3}{2}\pi$