# Disequazioni goniometriche

Per risolvere una disequazione goniometrica lineare del tipo: $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c > 0 \ (< 0)$
si possono usare due metodi: algebrico e grafico.
Nel primo caso si dovrà ricorrere alle formule parametriche razionali, nel secondo caso si effettuano considerazioni di geometria analitica.

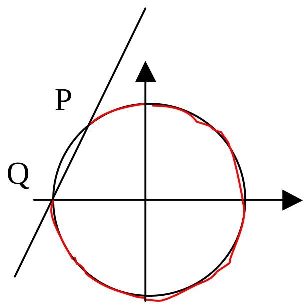
**Esempi con il <u>metodo grafico</u>.**

- Risolviamo la disequazione $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} < 0$ nell'intervallo $[0;2\pi]$

Poniamo $\cos x = X$, $\operatorname{sen} x = Y$ e consideriamo il sistema: $\begin{cases} Y - \sqrt{3}X + \sqrt{3} < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

La disequazione del sistema rappresenta il semipiano i cui punti stanno "sotto" la retta $Y = \sqrt{3}X - \sqrt{3}$, l'equazione, invece, è una circonferenza di raggio unitario avente il centro nell'origine.

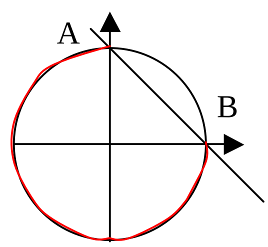
Le soluzioni del sistema sono $X = -1; Y = 0$ $\quad e \quad$ $X = -\frac{1}{2}; Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Essi rappresentano i punti della circonferenza che sono estremi degli archi ampi rispettivamente $\pi$ $\quad e \quad$ $\frac{2}{3}\pi$




Le soluzioni della disequazione assegnata sono quindi $-\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

- Risolviamo la disequazione $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x - 1 < 0$ nell'intervallo $[0;2\pi]$.

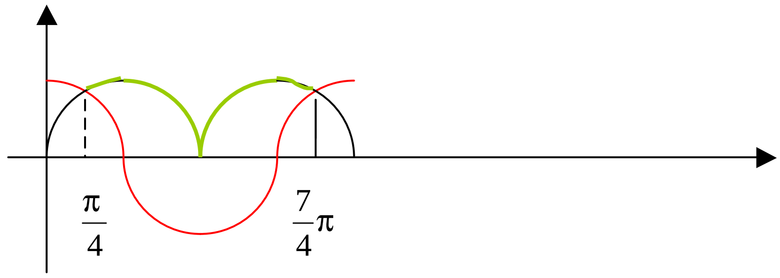
Poniamo $\begin{matrix} \operatorname{sen} 2x = X \\ \cos 2x = Y \end{matrix}$ e otteniamo il sistema: $\begin{cases} Y < -X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ la disequazione rappresenta il semipiano i cui punti sono sotto la retta $Y = -X + 1$. Risolvendo il sistema si ricavano i punti $A(0;1)$ $\quad B(1;0)$ che sono gli estremi degli archi ampi rispettivamente $\frac{\pi}{2}$ $e$ $2\pi$.



Le soluzioni sono quindi: $\frac{\pi}{2} < 2x < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} < x < \pi$ .

- Risolviamo la disequazione $|\mathrm{sen}\, x| > \cos x$ nell'intervallo $[0;2\pi]$.

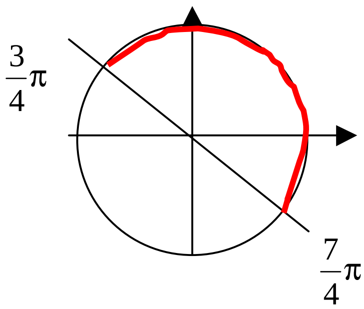
Dal grafico




È facile dedurre che le soluzioni sono: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$ infatti in tale intervallo le ordinate della curva $y = |\mathrm{sen}\, x|$ sono maggiori di quelle di $y = \cos x$.

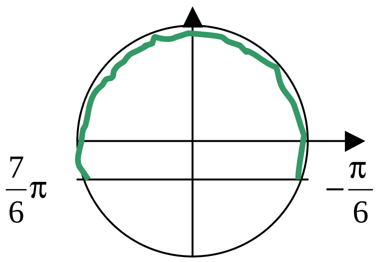
- Risolviamo la disequazione $\frac{sen\, x + \cos x}{2 sen\, 2x + 1} \geq 0$

$$N(x) \geq 0 \qquad sen\, x + \cos x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Y \geq -X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

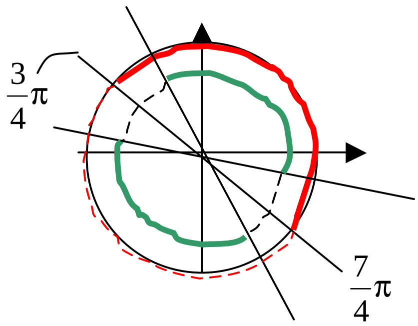



$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

$$D(x) > 0 \qquad 2 sen\, 2x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Y > -\frac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$



$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi < 2x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{12}+k\pi < x < \frac{7}{12}\pi + k\pi$$




e dal prodotto dei segni si ottiene:

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad \frac{3}{4}\pi \le x < \frac{11}{12}\pi \quad \vee \quad \frac{19}{12}\pi < x \le \frac{7}{4}\pi .$$

**Esempi con il metodo algebrico**

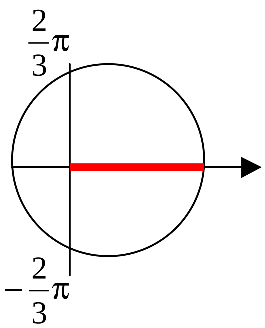
- Risolviamo la disequazione $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$ nell'intervallo $[0;2\pi]$.

L'equazione associata fornisce le seguenti soluzioni: $\cos x = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Occorre considerare **l'unione delle soluzioni**:

$$\cos x < -1$$

$$\cos x > -\frac{1}{2} \qquad -\frac{2}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$$

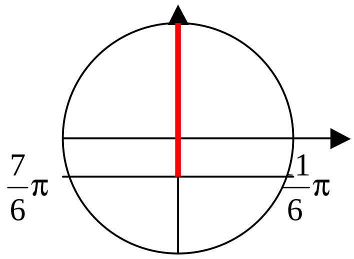



- Risolviamo la disequazione: $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 < 0$ nell'intervallo $[0;2\pi]$

Le soluzioni dell'equazione associata sono: $\text{sen}\, x = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

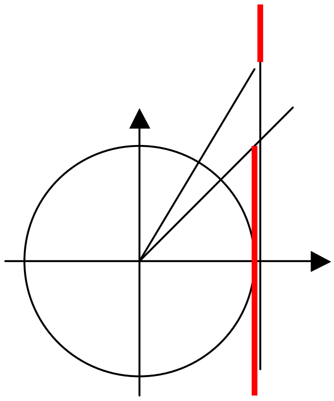
Quindi: $-\frac{1}{2} < \text{sen}\, x < 1 \quad \begin{cases} \text{sen}\, x < 1 \quad \forall x \in \left]0;2\pi\right[ \\ \text{sen}\, x > -\frac{1}{2} \quad 0 < x < \frac{7}{6}\pi \quad \vee \quad \frac{11}{6} < x < 2\pi \end{cases}$

Come si può osservare dal grafico:




- Risolviamo la disequazione $tg^2 x - 3tg\, x + 2 > 0$ nell'intervallo $[0;\pi]$

Le soluzioni dell'equazione associata sono: $tg\, x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ Quindi $\begin{matrix} tg\, x < 1 \\ tg\, x > 2 \end{matrix}$.



Occorre considerare **l'unione delle soluzioni**:

$tg\, x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

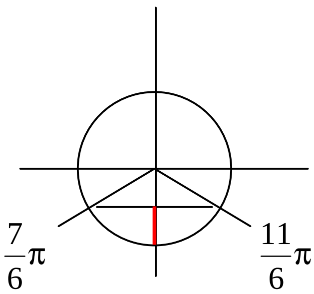
$tg\, x > 2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} 2 < x < \frac{\pi}{2}$

- Risolvere la disequazione $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 > 0$ nell'intervallo $[0;2\pi]$

Poiché le soluzioni dell'equazione associata sono : $sen\, x = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

Occorre considerare **l'unione delle soluzioni**: $\operatorname{sen}\, x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \operatorname{sen}\, x > 1$

Che, graficamente, equivale a:

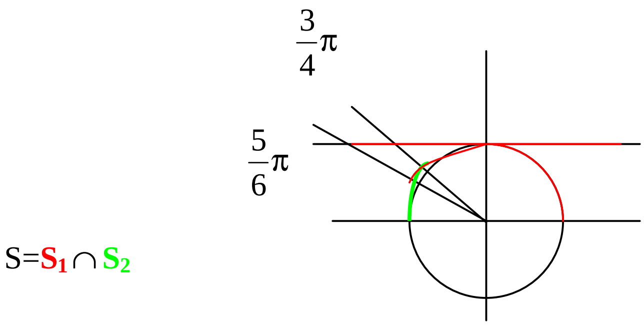



La disequazione è quindi verificata quando: $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$.

- Risolvere la disequazione: $ctg^2 x + (1+\sqrt{3})ctg\, x + \sqrt{3} < 0$

Le soluzioni dell'equazione associata sono date da: $ctg\, x = \begin{cases} \dfrac{-(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})}{2} = -1 \\ \dfrac{-(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})}{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$

Quindi: $-\sqrt{3} < ctg\, x < -1$ che equivale al **sistema**: $\begin{cases} ctg\, x > -\sqrt{3} \\ ctg\, x < -1 \end{cases}$ Da cui si ricava i grafico:



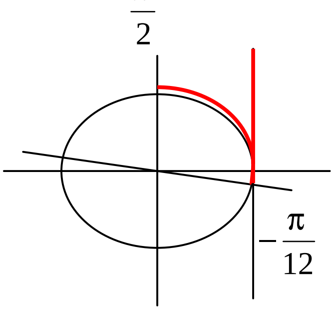

La disequazione è verificata negli intervalli: $\frac{3}{4}\pi + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi$ .

- Risolvere la disequazione lineare : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+(\sqrt{3}+2)\,\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1>0$ .

Ponendo $\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=y$ si ottiene l'equazione: $\cos y+(\sqrt{3}+2)\,\mathrm{sen}\, y+1>0$,
che va risolta con le formule parametriche.
Dopo aver effettuato la sostituzione, con semplici calcoli si ha:

$$\left(\sqrt{3}+2\right)\cdot t > -1.$$

Quindi $tg\,\frac{y}{2} > -(2-\sqrt{3})$ .



Ossia: $-\frac{\pi}{12}+k\pi < \frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) < \frac{\pi}{2}+k\pi$ .

Da cui si ricava: $-\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi+2k\pi$ .

Risolvere la disequazione: $\sqrt{3}\cos x+3\operatorname{sen} x-3>0$.

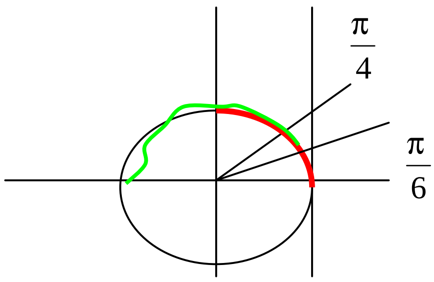
Mediante le formule parametriche si ottiene: $(3+\sqrt{3})\cdot t^2-6t+3-\sqrt{3}<0$

Poiché l'equazione associata ha le soluzioni: $t=\begin{cases}2-\sqrt{3}\\1\end{cases}$

Occorre risolvere il **sistema**: $\begin{cases}tg\,\frac{x}{2}>2-\sqrt{3} & \frac{\pi}{12}+k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}+k\pi\\ tg\,\frac{x}{2}<1 & k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

Da cui si ricava: $\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$

Come si può anche dedurre dalla lettura del seguente grafico:




**Nota**

Se la disequazione è omogenea di secondo grado in seno e coseno si dividono tutti i termini per $\operatorname{sen}^2 x$ e si risolve la disequazione di secondo grado in $\operatorname{tg} x$.

Se la disequazione è lineare omogenea occorre moltiplicarla e dividerla per $\cos x$.