Disequazioni in modulo

- Una disequazione del tipo $\left| f(x) \right| > c \quad (c > 0)$ ha come soluzioni quelle fornite da $-f(x) > c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < -c$ e quelle date da $f(x) > c$.
  Quindi $S = S_1 \cup S_2$
  - Una disequazione del tipo $\left| f(x) \right| < c \quad (c > 0)$ che equivale a $-c < f(x) < c$ ha come soluzioni quelle fornite dal sistema $\begin{cases} f(x) > -c \\ f(x) < c \end{cases}$. Quindi $S = S_1 \cap S_2$.

Esempi

- Le soluzioni della disequazione $\left| x^2 - 1 \right| < 1$ sono fornite dal sistema: $\begin{cases} x^2 - 1 > -1 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases}$ da cui si ha: $\begin{cases} x^2 > 0 \quad \forall\, x \in \Re_0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$ Quindi: $S = S_1 \cap S_2 \quad \Rightarrow S : \left]-\sqrt{2};0\right[\cup \left]0;\sqrt{2}\right[$.

- Le soluzioni della disequazione $\left| 1 - x^2 \right| > 8$ si ottengono risolvendo le disequazioni:

$1 - x^2 < -8 \quad e \quad 1 - x^2 > 8$ Dalla seconda si ha: $x^2 + 7 < 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \varnothing$, dalla prima si ricava: $S_2 : \left]-\infty;-3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

Poiché $S = \varnothing \cup S_2 \Rightarrow S = S_2$.

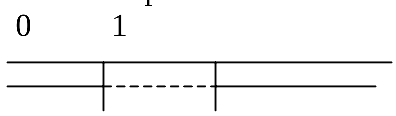
- <u>Una disequazione irrazionale e in modulo</u>

Per risolvere la disequazione

$$\frac{1 - \sqrt{x + \left| x^2 - x \right|}}{\sqrt{x + \left| x^2 - x \right|}} > 0$$

determiniamo gli intervalli in cui l'espressione in modulo risulta positiva:

$x^2 - x > 0 \quad ; \quad x(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \vee x > 1$



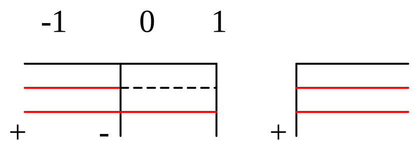
e consideriamo i seguenti casi:

- per $x < 0 \quad e \quad x > 1$ $\qquad \dfrac{1 - \sqrt{x + x^2 - x}}{\sqrt{x + x^2 - x}} > 0$ ossia: $\dfrac{1 - \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} > 0 \qquad (1)$

- per $\quad 0 < x < 1 \qquad \dfrac{1-\sqrt{x-x^2+x}}{\sqrt{x-x^2+x}} > 0$ da cui $\dfrac{1-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}} > 0 \quad (2)$

studiamo il caso (1):

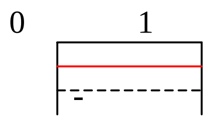
$$\frac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x^2}} < 0 \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2}-1>0 & |x|>1 \quad \Rightarrow \quad x<-1 \quad \vee \quad x>1 \\ \sqrt{x^2}>0 & \forall x \in \mathbb{R}_0 \end{cases}$$



$S_1: \quad -1 < x < 0$

studiamo il caso (2):

$$\frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{\sqrt{2x-x^2}} < 0 \qquad \begin{cases} 2x-x^2>0 & x^2-2x<0 \quad \Rightarrow \quad 0<x<2 \\ \sqrt{2x-x^2}>1 & x^2-2x+1<0 \quad (x-1)^2<0 \ \textit{impossibile} \end{cases}$$



$S_2: \quad 0 < x < 1$

e avremo: $\qquad S = S_1 \cup S_2 \qquad -1 < x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < 1.$