Disequazioni irrazionali

Come già visto nello studio delle equazioni irrazionali contenenti radicali quadratici, per risolvere una disequazione irrazionale occorre trasformarla in una razionale, mediante elevazione al quadrato. La disequazione ottenuta avrà come soluzioni quelle che appartengono al dominio della disequazione assegnata.

Ad esempio, per risolvere una disequazione del tipo $\sqrt{x-1} > 2$ occorre considerare il sistema: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 > 4 \end{cases}$ che fornisce le soluzioni: $x > 5$.

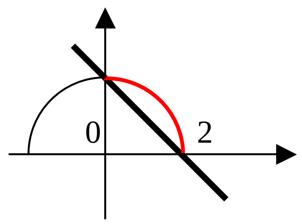
Si possono presentare dei casi banali quali ad esempio $\sqrt{x} + 2 > 0$ o $\sqrt{x+2} + 1 > 0$. E' evidente che sono verificate per $x \geq 0$.

Per risolvere graficamente una disequazione irrazionale consideriamo i seguenti esempi:

Esempi

- Per determinare le soluzioni della disequazione $\sqrt{4-x^2} > -x+2$

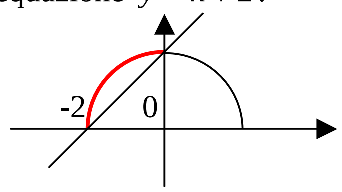
consideriamo il sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$, che rappresenta una semicirconferenza avente il centro nell'origine e raggio 2, e la retta di equazione $y = -x+2$.



I punti della semicirconferenza che stanno "sopra" la retta ($0 < x < 2$) rappresentano le soluzioni della disequazione data.

- Per determinare le soluzioni della disequazione $\sqrt{4-x^2} \geq x+2$

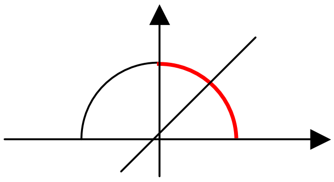
consideriamo il sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$, che rappresenta una semicirconferenza avente il centro nell'origine e raggio 2, e la retta di equazione $y = x+2$.



I punti della semicirconferenza che stanno "sopra" la retta ($-2 \leq x \leq 0$) rappresentano le soluzioni della disequazione data.

- Per determinare le soluzioni della disequazione $\sqrt{1-x^2} < x+1$

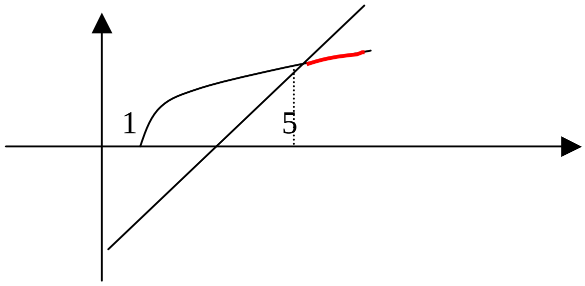
consideriamo il sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$, che rappresenta una semicirconferenza avente il centro nell'origine e raggio 1, e la retta di equazione $y = x+1$.



I punti della semicirconferenza che stanno "sotto" la retta ($0 < x \le 1$) rappresentano le soluzioni della disequazione data.

- Per determinare le soluzioni della disequazione $\sqrt{x-1} < x-3$

consideriamo il sistema: $\begin{cases} y^2 = x-1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x = y^2+1 \\ y \ge 0 \end{cases}$ che rappresenta un arco di parabola avente il vertice nel punto $(1;0)$ e giacente nel semipiano delle ordinate positive, e la retta di equazione $y = x-3$.



I punti della parabola che stanno "sotto" la retta ($x > 5$) rappresentano le soluzioni della disequazione data.

Consideriamo adesso due particolari tipi di disequazioni:

1. $\sqrt{f(x)} > g(x)$

   dopo aver imposto la condizione di esistenza: $f(x) \ge 0$, osserviamo che $g(x)$ può essere maggiore, minore o uguale a zero. Se $g(x) \ge 0$ è possibile elevare al quadrato la disequazione, se invece $g(x) < 0$ occorre assegnare la condizione di esistenza. Quindi, per risolvere la disequazione si considerano i sistemi: $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$ $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ Poiché la terza disequazione del primo sistema assicura la positività di $f(x)$, è inutile considerare $f(x) \ge 0$.

   Le soluzioni della disequazione saranno date dall'**unione** delle soluzioni dei sistemi: $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$ $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} < g(x)$

   anche in questo caso s'impone la condizione di esistenza: $f(x) \ge 0$, e da questa scaturisce che $g(x) > 0$. Le soluzioni della disequazione sono date dal sistema: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

Per risolvere una disequazione del tipo

$$\sqrt{f(x)} > |g(x)|$$

dovremmo risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Poiché il primo sistema non ammette soluzioni $\left(|g(x)| < 0 \quad \textit{mai verificata}\right)$ ed essendo, nel secondo sistema, $|g(x)| \geq 0$ sempre verificata, basterà risolvere solamente la disequazione

$$f(x) > |g(x)|^2$$

.

Per risolvere una disequazione del tipo

$$\sqrt{f(x)} < |g(x)|$$

dovremmo risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < |g(x)|^2 \end{cases}$$

Poiché $|g(x)| > 0$ è sempre verificata, basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < |g(x)|^2 \end{cases}$$

oppure

$$f(x) < |g(x)|^2$$

nel dominio della disequazione.(ricordiamo infatti che per risolvere una disequazione irrazionale è necessario determinare gli intervalli in cui essa ha significato in $\mathbb{R}$).