Equazioni esponenziali

Per risolvere le equazioni esponenziali occorre ricordare le seguenti proprietà:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad a, b > 0$

$\left[(a)^x\right]^y = a^{x \cdot y}$

ed i seguenti casi particolari: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^x = n \ (n \in \Re^-)$ *impossibile*

ricordiamo infatti che ……. $a^x > 0 \quad \forall x \in \Re$

Si possono presentare i seguenti casi:

1. se l'equazione è del tipo $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, si pone $f(x) = g(x)$.

Esempi

- $\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{8}{27} = 0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $x = 3$
- $2^{\frac{2x+4}{x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; $2^{\frac{2x+4}{x}} = 4^2 \Rightarrow \frac{2x+4}{x} = 4 \Rightarrow x = 2$
- $4^x - 2^{2x+1} = 2^{2x-1} - 6$ essa equivale all'equazione $2^{2x} - 2 \cdot 2^{2x} = 2^{2x} \cdot \frac{1}{2} - 6$

ponendo $2^{2x} = y$ (*) si ottiene $y - 2y = \frac{1}{2}y - 6$ che risolta fornisce $y = 4$. Ritornando alla posizione (*) si ricava $2^{2x} = 2^2 \Rightarrow x = 1$

2. Se l'equazione contiene termini del tipo a^x e a^{2x} poniamo $a^x = y$ e, di conseguenza $a^{2x} = y^2$.

Esempio

Data l'equazione $9^x - 3^x = 6$ essa equivale a $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$ ponendo $3^x = y$ si ottiene $y^2 - y - 6 = 0$ da cui $y_1 = -2;\ y_2 = 3$.

Tornando alla posizione fatta si ha: $3^x = -2 \quad \textit{impossibile}$

$3^x = 3 \quad \Rightarrow x = 1$

3. se l'equazione è del tipo $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ si divide l'equazione per $b^{f(x)}$ e si ottiene:
$$\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \quad \Rightarrow f(x) = 0$$

esempio

- $2^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x-1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

4. se l'equazione contiene potenze in cui l'incognita è sotto segno di radice con indice pari $a^{\sqrt{f(x)}}$ occorre accettare solo le soluzioni per le quali $f(x) \geq 0$.

Esempio

- $2^{\sqrt{x}+2} + 2^{2-\sqrt{x}} - 17 = 0$ le soluzioni devono essere tali che $x \geq 0$.

L'equazione data si può scrivere $2^2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} - 17 = 0$ e, ponendo $2^{\sqrt{x}} = y$ si ha:

$4y + \frac{4}{y} - 17 = 0$ dalla quale si ricava $y_1 = 4$

$y_2 = \frac{1}{4}$

Tornando alla posizione fatta $2^{\sqrt{x}} = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^{\sqrt{x}} = 2^2 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

$2^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow 2^{\sqrt{x}} = 2^{-2} \quad \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \textit{impossibile.}$

5. se l'equazione è del tipo $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ si introducono i logaritmi: $\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$ e si ha $f(x)\log a = g(x)\log b$ da cui segue: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log b}{\log a}$

Esempio

$2^{x-1} = 3^{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\log 2 = (x+2)\log 3$ da cui $x(\log 2 - \log 3) = 2\log 3 + \log 2$, quindi:
$$x = \frac{\log 9 + \log 2}{\log 2 - \log 3}$$