Risoluzione di una equazione irrazionale mediante l'uso di disequazioni

Sappiamo che le soluzioni di un'equazione irrazionale del tipo:

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \qquad (1)$$

vanno ricercate tra quelle che appartengono al dominio dell'equazione, fornite dal sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

e che soddisfano il sistema misto:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) - h(x) \geq 0 \\ \dfrac{(f(x) - g(x) - h(x))^2}{4} = g(x) \cdot h(x) \end{cases}$$

Si riscontra però, in taluni casi, che tali soluzioni, pur appartenendo al dominio dell'equazione, non soddisfano l'equazione assegnata.
Per esser certi di non incorrere in soluzioni incompatibili è necessario portare la (1) nella forma:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{g(x)} \qquad (3)$$

in modo che $h(x) + g(x) \geq 0$,

e considerare le soluzioni del sistema (2) che soddisfano il sistema misto

$$\begin{cases} f(x) - g(x) - h(x) \geq 0 \\ \dfrac{(f(x) - g(x) - h(x))^2}{4} = g(x) \cdot h(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Le soluzioni del sistema (4), appartenenti al dominio dell'equazione, saranno le uniche soluzioni dell'equazione data.
Per verificare quanto esposto consideriamo il seguente esempio:

- Risolvere l'equazione:

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{x-9}-\sqrt{x-1} \qquad (1')$$

determiniamo il dominio dell'equazione mediante il sistema:

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ x-9\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$$

e osserviamo che deve essere:

$$x\geq 9 \qquad (2')$$

Elevando al quadrato la (1'), dopo semplici calcoli, si ottiene:

$$x-6=2\sqrt{x^2-10x+9} \qquad (3')$$

Questa è vera quando $x\geq 6$
che, associata alla (2'), impone: $x\geq 9$.

Elevando al quadrato la (3') si ottiene: $3x^2-28x=0$

che dà come soluzione ,ipoteticamente accettabile, $x=\frac{28}{3}$

Se si esegue la verifica della (1') si riscontra che tale radice non soddisfa l'equazione data, pur essendo maggiore di 9.

Risolviamo adesso la (1') portandola nella forma:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$$

Elevando al quadrato, si ha:

$$2\sqrt{x^2-5x+4}=-4-x$$

e questa è vera per $x\leq -4$.

Dovendo valere anche la (2') si deduce che l'equazione data non ha soluzioni, come in effetti deve essere.

Risolviamo l'equazione:

$$\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+4} \qquad (1'')$$

Mediante il sistema:

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 4x-5 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

ricaviamo che deve essere: $x \geq \frac{5}{4}$ (2’’)

ed elevando al quadrato la (1’’), dopo semplici calcoli, otteniamo:

$$\sqrt{(4x-5)(x+4)} = x \qquad (3'')$$

Da cui: $x \geq 0$ E, dovendo valere anche la (2’’), si ha che $x \geq \frac{5}{4}$
Elevando al quadrato la (3’’), dopo semplici passaggi, si perviene a
$3x^2 + 11x - 20 = 0$
la cui unica soluzione ipoteticamente accettabile è $x = \frac{4}{3}$
Se eseguiamo la verifica dell’equazione data riscontriamo che tale radice non la soddisfa, pur essendo maggiore di $\frac{5}{4}$
Se invece, portiamo la (1’’) nella forma

$$\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x-5}$$

ed eleviamo al quadrato, otteniamo:

$$\sqrt{(3x-1)(x+4)} = -4$$

dalla quale deduciamo che l’equazione data è impossibile, come in effetti deve essere.

- Risolviamo l’equazione

$$\sqrt{x-4} = 3 - \sqrt{4x-7} \qquad (1''')$$

Determiniamo il campo di esistenza dell'equazione mediante il sistema:

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 4x-7 \geq 0 \end{cases}$$

e otteniamo $\quad x \geq 4 \quad$ (2''')

Elevando al quadrato la (1''') abbiamo:

$$x+2=2\sqrt{4x-7} \qquad (3''')$$

Da cui ricaviamo $x \geq -2$ che, associata alla (2'''), fornisce: $x \geq 4$

Elevando al quadrato la (3''') otteniamo come soluzioni ipoteticamente accettabili
$x=4$ e $x=8$
La seconda di esse non soddisfa la (1'''), pur essendo maggiore di 4.
Se invece portiamo l'equazione data nella forma:

$$\sqrt{x-4}+\sqrt{4x-7}=3$$

ed eleviamo al quadrato otteniamo: $2\sqrt{(x-4)(4x-7)}=20-5x$
da cui si ricava $x \leq 4$
Osservando che deve valere anche la (2''') si deduce che l'unica soluzione da accettare è
$x=4$.