FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI

Alcuni utili richiami….

1. proprietà delle potenze $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x : a^y = a^{x-y}$

   $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

   $\left[(a)^x\right]^y = a^{x \cdot y}$

2. M.C.D. di due o più monomi
   viene determinato a meno del coefficiente ed è il prodotto formato dagli elementi comuni a ciascun monomio, presi con il minor esponente

   Ad es. il MCD di $3x^2y^3z - 5xy^2$ è xy^2

3. prodotti notevoli $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$
   $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4. teorema di Ruffini: Un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $x-a$ se $P(a)=0$.
   ad esempio il polinomio $P(x) = x^2 - 5x - 14$ è divisibile per $x+2$ perché $P(-2) = 4 + 10 - 14 = 0$
   In particolare, il polinomio $x^3 - a^3$ si annulla per $x = a$, quindi è divisibile per $x - a$

   operando la divisione si ottiene: $(x^3 \quad +0 \quad +0 \quad -a^3):(x-a) = x^2 + ax + a^2$
   Allo stesso modo $x^3 + a^3$ si annulla per $x = -a$, quindi è divisibile per $x + a$.
   Raccogliendo quanto sopra detto possiamo scrivere: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$
   $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$

Differenza di due quadrati

Si scompone nella somma delle basi per la loro differenza $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Raccoglimento a fattor comune

Quando il MCD del polinomio è diverso da 1 il polinomio si scrive come prodotto di tale MCD per il polinomio che si ottiene da quello dato dividendo tutti i suoi termini per il MCD.

Ad es. $x^2y^4 - xyz + 3xy^2z \quad ha \quad M.C.D. = xy$

$xy(x\,y^3 - \quad z \ + 3yz)$

Raccoglimenti successivi

Quando il polinomio può essere considerato la somma di due o più polinomi visti nel caso precedente.

Ad es. $5x-3xy+5a-3y$ può essere considerato $(5x-3xy)+(5a-3y)$

agendo separatamente sui due polinomi come nel caso (2), possiamo scrivere: $x(5-3y)+a(5-3y)$ da cui si ottiene: $(5-3y)(x+a)$

Trinomio particolare di secondo grado $x^2+S\,x+P$

Se il coefficiente del termine di primo grado è $S=a+b$ ed il termine noto è $P=a\cdot b$, allora:
$x^2+S\,x+P=(x+a)(x+b)$

Ad esempio, per scomporre $x^2-11x+28$ ragioniamo nel seguente modo:

- determiniamo tra i divisori di 28 due numeri che hanno come prodotto +28 e come somma -11
  $28=2^2\cdot 7 \quad \rightarrow \quad 2\,;14$
  $\rightarrow \quad 4;7$
- i due numeri sono concordi (prodotto positivo) e sono negativi (somma negativa);
- i numeri richiesti sono quindi: -4 e -7
- $x^2-11x+28=(x-4)(x-7)$

Se il coefficiente del termine di secondo grado è "m" cercheremo di determinare due numeri che hanno come prodotto il numero $m\cdot P$ e come somma S.
Ad es. per scomporre il trinomio $3x^2-7x+4$ dobbiamo determinare due numeri che hanno come prodotto +12 e come somma -7;
poiché i due numeri sono -3 e -4, possiamo scrivere : $3x^2-7x+4=3x^2-3x-4x+4$
e, raccogliendo, otteniamo: $3x(x-1)-4(x-1)=(x-1)(3x-4)$.

Regola di Ruffini

Dopo aver ricordato che un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $x-a$ se $P(a)=0$, cerchiamo di scomporre il polinomio x^3-7x-6

- determiniamo i divisori del termine noto. Essi sono: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3$
- poiché $P(-1)=(-1)^3-7(-1)-6=0$ il polinomio è divisibile per $x=-1$

	1	0	-7	-6
-1		-1	1	6
	1	-1	-6	0

quindi $x^3-7x-6=(x+1)(x^2-x-6)$

Il trinomio x^2-x-6 può essere scomposto, come si è visto nel caso precedente.
Osserviamo che $P=-6$ e $S=-1$; quindi i numeri richiesti sono -3 e +2
In conclusione $x^3-7x-6=(x+1)(x-3)(x+2)$.