Equazioni di grado superiore al secondo scomponibili in fattori

Uno dei metodi che permette di risolvere un'equazione $E(x)=0$, di grado superiore al secondo, è quello di scomporla nel prodotto di equazioni di primo e secondo grado in modo da poter avere un'equazione del tipo

$$A(x)\cdot B(x)\cdot \mathbf{h} \cdot P(x)=0$$

che, per la legge di annullamento del prodotto, si risolve uguagliando a zero ciascuno dei suoi fattori.

L'uso di questo metodo è possibile quando si conosce uno zero del polinomio $E(x)$.

E' possibile dimostrare che questo zero o soluzione di $E(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0x^n+a_1x^{n-1}+\mathbf{h}+a_n=0$ è da ricercare tra le frazioni irriducibili $\frac{r}{s}$ con r **divisore del termine noto** a_n **ed** s **divisore di** a_0 (coefficiente del termine di grado massimo).

Esempio

Risolvere l'equazione $8x^4-20x^3+10x^2+5x-3=0$

Per abbassare di grado l'equazione assegnata determiniamo i $\begin{cases} divisori\ di\ 3=\{\pm1;\pm3\} \\ divisori\ di\ 8=\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\} \end{cases}$

Una possibile soluzione dell'equazione è da ricercare nell'insieme

$$\left\{\pm1;\pm3;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{1}{8};\pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{3}{4};\pm\frac{3}{8}\right\}$$

Poiché $E(1)=8-20+10+5-3=0$ e

$$E\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{1}{16}-20\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{2}-3=0$$

abbassiamo di grado il polinomio $E(x)$ dividendolo per $x-1$ e per $x-\frac{1}{2}$ mediante la regola di Ruffini e otteniamo:

	8	-20	10	5	-3
1		8	-12	-2	3
	8	-12	-2	3	0
$\frac{1}{2}$		4	-4	-3	
	8	-8	-6	0	

$$\Rightarrow \qquad (x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(8x^2-8x-6\right)=0$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi $x_1=1;\quad x_2=\frac{1}{2};\quad x_3=-\frac{1}{2};\quad x_4=\frac{3}{2}.$

Equazione binomia

E' un'equazione del tipo $\boxed{a\,x^n = b}$ che ha come soluzioni

$x = \pm\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ se n è pari

$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ se n è dispari

Equazione trinomia

E' un'equazione del tipo $\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0}$ (se n=2 l'equazione si chiama biquadratica)

Per risolvere questa equazione poniamo $x^n = y$ determiniamo le soluzioni dell'equazione di secondo grado $a\,y^2 + b\,y + c = 0$ e infine risolviamo le equazioni binomie $x^n = y_1$; $x^n = y_2$

Esempio

$x^8 - 6x^4 + 5 = 0$ ponendo $x^4 = y$ (**)

otteniamo $y^2 - 6y + 5 = 0$ da cui $y = 3 \pm \sqrt{4}$ $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 5 \end{cases}$

sostituendo questi valori nella (**) ricaviamo: $\begin{cases} x = \pm\sqrt[4]{1}; \quad x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt[4]{5} \end{cases}$

Equazioni reciproche

Un'equazione si dice reciproca perché se ha come radice α, avrà come soluzione anche $\frac{1}{\alpha}$.

In un'equazione reciproca i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti da essi sono uguali oppure opposti. Nel primo caso l'equazione si dice di ***prima specie***; nel secondo ,si dice di ***seconda specie***.

Equazioni reciproche di terzo grado di prima specie

E' un'equazione del tipo $a\,x^3 + b\,x^2 + b\,x + a = 0$ che risulta semplice da risolvere perché può essere scomposta nel prodotto di un'equazione di primo grado ed un'equazione di secondo grado: $(x+1)(m\,x^2 + n\,x + p) = 0$.

Equazioni reciproche di terzo grado di seconda specie

E' un'equazione del tipo $a\,x^3 + b\,x^2 - b\,x - a = 0$ che risulta semplice da risolvere perché può essere scomposta nel prodotto $(x-1)(m\,x^2 + n\,x + p) = 0$.

Equazioni reciproche di quinto grado di prima specie

E' un'equazione del tipo $a x^5 + b x^4 + c x^3 + c x^2 + b x + a = 0$
Essendo divisibile per $x+1$ la si abbassa di grado e si ottiene

$(x+1)\cdot Q(x) = 0$ dove $Q(x)$ è un'equazione reciproca di **quarto grado** che va risolta come di seguito indicato.

Esempio
$8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0$

	8	-6	-83	-83	-6	8
-1		-8	14	69	14	-8
	8	-14	-69	-14	8	0

vedi soluzione **(^^)**

Equazioni reciproche di quinto grado di seconda specie

E' un'equazione del tipo $a x^5 + b x^4 + c x^3 - c x^2 - b x - a = 0$
Essendo divisibile per $x-1$ la si abbassa di grado e si ottiene

$(x-1)\cdot Q(x) = 0$ dove $Q(x)$ è un'equazione reciproca di **quarto grado** che va risolta come in seguito indicato.

Esempio
$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$

	6	-41	97	-97	-41	6
1		6	-35	62	-35	6
	6	-35	62	-35	6	0

(eq. reciproca di quarto grado di 1^a specie)

Equazioni reciproche di quarto grado di prima specie

E' un'equazione del tipo $a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$
Per risolverla la dividiamo per x^2 e raccogliamo i termini contenenti a e b

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ notando che la somma dei quadrati $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

poniamo $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$ **(§§)**

e otteniamo l'equazione di secondo grado $a y^2 + b y + c - 2a = 0$

Dopo aver risolto questa equazione sostituiamo nella **(§§)** le soluzioni ottenute e risolviamo le equazioni $x+\frac{1}{x}=y_1$ e $x+\frac{1}{x}=y_2$.

Esempio risolviamo l'equazione **(^^)** ricavata in precedenza

$8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0$

$8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-14\left(x+\frac{1}{x}\right)-69=0$ effettuando la sostituzione **(§§)** otteniamo:

$8y^2-14y-85=0$ da cui $y_1=-\frac{5}{2}$; $y_2=\frac{17}{4}$

risolvendo le equazioni: $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ e $x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$. ricaviamo

$x_1=\frac{1}{4}$; $x_2=4$; $x_3=-2$; $x_4=-\frac{1}{2}$

Equazioni reciproche di quarto grado di seconda specie

E' un'equazione del tipo $a\,x^4+b\,x^3-b\,x-a=0$

Essendo divisibile per $x\pm1$ può essere abbassata di grado due volte in modo da ottenere il prodotto:

$(x+1)\cdot(x-1)\cdot Q(x)=0$ dove $Q(x)=0$ è un'equazione di secondo grado.

Esempio
$ax^4-\left(a^2+1\right)x^3+\left(a^2+1\right)x-a=0$

	a	-(a² +1)	0	(a² +1)	-a
1		a	a-(a² +1)	a-(a² +1)	a
	a	a-(a² +1)	a-(a² +1)	a	0 (eq. reciproca di 3° grado di prima specie)
-1		-a	(a² +1)	-a	
	a	-(a² +1)	a	0	

Per completare risolviamo l'equazione di secondo grado $a\,x^2-\left(a^2+1\right)x+a=0$

E otteniamo $x=\frac{\left(a^2+1\right)\pm\left(a^2-1\right)}{2a}\Rightarrow\begin{cases}x_3=\frac{1}{a}\\x_4=a\end{cases}$