Equazioni letterali di primo grado

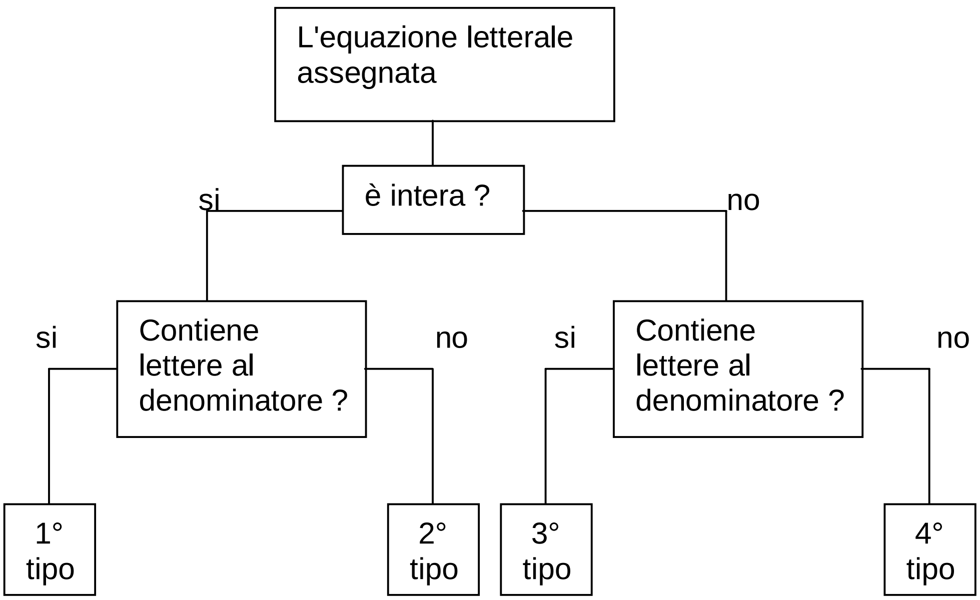
Le equazioni letterali sono equazioni nelle quali, oltre all'incognita, figurano una o più lettere.
Poiché nelle soluzioni di dette equazioni compaiono quasi sempre delle lettere è necessario stabilire quali valori di tali lettere rendono l'equazione determinata, indeterminata o impossibile. Si effettua, cioè, la discussione dell'equazione.

Prima di svolgere alcuni esercizi è opportuno ricordare che un'equazione del tipo $a\,x = b$ è:

- determinata se $a \neq 0$
- indeterminata se $a = 0$ e $b = 0$
- impossibile se $a = 0$ (*)

(*) una frazione ha significato solo se il suo denominatore è diverso da zero.

Possiamo classificare le equazioni letterali in quattro tipi secondo lo schema seguente:



Se l'equazione è del 2° tipo si discute solo la soluzione finale; se l'equazione è del 1° tipo occorre effettuare anche la discussione preliminare (eliminare i valori che annullano i denominatori dell'equazione).
Se l'equazione è del 3° o 4° tipo si effettua la discussione preliminare per verificare l'esistenza dell'equazione e, ricavata la sua soluzione, la si confronta con i valori di x esclusi.
Per chiarire quanto sopra detto consideriamo i seguenti esempi:

<u>2° tipo</u>

Primo esempio

$$(a-b)x = a(2x-1)$$

$$ax - bx = 2ax - a$$

e da questa ricaviamo: $x = \dfrac{a}{a+b}$

discussione:

Se $b \neq 0 \quad e \quad a = -b$ l'equazione è impossibile $\left(x = \frac{-b}{0} \right)$

Se $a = b = 0$ l'equazione è indeterminata $\left(x = \frac{0}{0} \right)$

Se $a \neq -b$ l'equazione è determinata

Secondo esempio

$$a(ax-1) = x(5a-6) - 2$$

$$(a^2 - 5a + 6)x = a - 2$$

$$x = \frac{a-2}{(a-2)(a-3)}$$

discussione:

Se $a \neq 2 \quad e \quad b \neq 3 \quad x = \frac{1}{a-3}$ determinata

Se $a = 2 \quad x = \frac{0}{0}$ indeterminata

Se $a = 3 \quad x = \frac{1}{0}$ impossibile

<u>1° tipo</u>

Primo esempio

$$\frac{bx-a}{a} = \frac{ax-b}{b}$$

considerazioni preliminari: l'equazione ha significato se $a \neq 0 \quad e \quad b \neq 0$

supposto ciò, operiamo su di essa

$$b^2x - ab = a^2x - ab$$

$\left(b^2 - a^2\right)x = 0 \quad \Rightarrow \quad (b+a)(b-a)x = 0$ e otteniamo: $x = \frac{0}{(b-a)(b+a)}$

discussione:

se $b \neq \pm a$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è: $x = 0$;

se $b = \pm a$ l'equazione è indeterminata $x = \frac{0}{0}$

Secondo esempio

$$\frac{ax}{a-1} + \frac{x}{a+1} = \frac{a-2x+1}{a^2-1}$$

discussione preliminare osserviamo che l'equazione perde di significato per $a = \pm 1$

operando sull'equazione otteniamo $\left(a^2 + 2a + 1\right)x = a + 1$

$$x = \frac{a+1}{\left(a+1\right)^2}$$

discussione finale avendo supposto $a \neq -1$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x = \frac{1}{a+1}$.

3° tipo

Primo esempio

$$\frac{x-a}{x} - \frac{ax-1}{a(x-a)} = \frac{x+a^2-1}{x^2-ax} + \frac{1}{a^2x-ax^2}$$

scomponiamo in fattori i denominatori

$$\frac{x-a}{x} - \frac{ax-1}{a(x-a)} = \frac{x+a^2-1}{x(x-a)} - \frac{1}{ax(x-a)}$$

perché l'equazione abbia significato deve essere: $x \neq 0$; $x \neq a$; $a \neq 0$

Procediamo nella risoluzione e otteniamo, dopo semplici passaggi,

$$(2a^2+a-1)x = a+1$$

$$x = \frac{a+1}{(a+1)(2a-1)}$$

$$x = \frac{a+1}{(a+1)(2a-1)}$$

discussione: se $a \neq -1$, $a \neq \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{2a-1}$

se $a = -1$ l'equazione è indeterminata

se $a \neq -1$ e $a = \frac{1}{2}$ l'equazione è impossibile.

Secondo esempio

$$1 - \frac{1}{2x+a} = \frac{2x-1}{2x-a}$$

Dopo aver osservato che l'equazione non ha significato per $a = \pm\frac{a}{2}$

procediamo nella sua risoluzione

$$4x^2 - a^2 - 2x + a = 4x^2 - 2x + 2ax - a$$

$$2ax = 2a - a^2$$

$$x = \frac{a(2-a)}{2a}$$

Discussione: se $a \neq 0$ $x = \frac{2-a}{2}$ l'equazione è determinata

se $a = 0$ $x = \frac{0}{0}$ l'equazione è impossibile

Verifichiamo adesso per quali valori di a si ha $x = \pm\frac{a}{2}$

Da $\frac{a(2-a)}{2a} = \frac{a}{2}$ ricaviamo $2a(a-1) = 0$ $a = 0$; $a = 1$

Da $\frac{a(2-a)}{2a} = -\frac{a}{2}$ " $2a - a^2 = -a^2$ $a = 0$

Quindi, anche per $a = 1$ l'equazione è impossibile.

<u>4° tipo</u>

Primo esempio

$$\frac{a-1}{x} + \frac{a+1}{x+1} = \frac{2a}{x(x+1)}$$

perché l'equazione abbia significato deve essere: $x \neq 0;\quad x \neq -1$

Procediamo nella risoluzione e otteniamo, dopo semplici passaggi,

$$2ax = a+1$$

$x = \frac{a+1}{2a}$ Discussione: l'equazione è determinata se $a \neq 0$

Determiniamo adesso per quale valore di a si ha: $x = 0 \quad e \quad x = -1$ ponendo:

$$\frac{a+1}{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\frac{a+1}{2a} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

Conclusioni: per $a = -1 \quad e \quad a = -\frac{1}{3}$ l'equazione è impossibile.

Secondo esempio

$$\frac{b}{x-1} + \frac{2x^2}{(x-1)^2} - \frac{2x-b}{x-1}$$

perché l'equazione abbia significato deve essere: $x \neq 1$

Risolviamo l'equazione:

$$b(x-1) + 2x^2 - (2x-b)(x-1) = 0$$

$$2bx + 2x = 2b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{b+1}$$

Discussione: per $b \neq -1$ l'equazione è determinata

per $b = 1$ l'equazione è impossibile

Verifichiamo, infine, per quale valore di b l'incognita vale 1, ponendo:

$\frac{b}{b+1} = 1$ Poiché per nessun valore di b si ha $b = b+1$ la discussione è completata.