Logaritmi

Osserviamo che l'operazione di elevamento a potenza $a^x = b$ possiede due operazioni inverse:

- L'estrazione di radice, che permette di determinare la base "a" della potenza;
- Il logaritmo, che consente di calcolare l'esponente "n" della potenza.

$$a^n = b \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[n]{b} \\ n = \log_a b \end{cases}$$

ad esempio $2^3 = 8 \rightarrow \begin{cases} base = \sqrt[3]{8} \\ esponente = \log_2 8 \end{cases}$

Definiamo logaritmo *di un numero l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero dato.* Ovvero: $\log_a b = x$

Dalla definizione data scaturisce l'equivalenza tra le due uguaglianze: $\begin{cases} a^x = b \\ \log_a b = x \end{cases}$

Osservazioni

-La base a non può essere 1 perché $1^x = b$ con $b \neq 1$ non ha soluzioni (es. $1^x = 3$)

-La base a non può essere 0 perché $0^x = b$ con $b \neq 0$ non ha soluzioni. (es. $0^x = 2$

-Non esiste il logaritmo di un numero negativo. Infatti, essendo $a^x > 0$, l'equazione $a^x = b$ non ha soluzioni se $b < 0$ (es. $2^x = -3$)

I sistemi di logaritmi più usati sono:

- i logaritmi naturali (ln) o di Nepero [1] che hanno base e $\qquad e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
- i logaritmi decimali (log) o di Briggs[2] che hanno base **10**

Il numero $e = 2,71828...$ è un numero trascendente ed è stato scelto come base dei logaritmi naturali perché le soluzioni di svariati problemi di matematica applicata (l'equilibrio di un cavo flessibile, il passaggio della corrente elettrica in un circuito, la disintegrazione di un elemento radioattivo, ..) sono espresse mediante potenze di e.

Tenendo conto della definizione di logaritmo, notiamo i seguenti **casi particolari**:

---

[1] **John Napier** (1550-1617) Mirifice logarithmorum canonis (1614), inventò **i logaritmi** al fine di trasformare le consuete operazioni di moltiplicazione e divisione rispettivamente in un'addizione e in una sottrazione, concettualmente più facili da eseguire.

[2] **HenryBriggs** (1556-1630) Arithmetica logarithmica (1624) introdusse i logaritmi decimali perché è sicuramente più comodo indicare misure estremamente grandi ed estremamente piccole mediante potenze del 10.

$\log_a 1 = 0 \quad (a^0 = 1)$
$\log_a a = 1 \quad (a^1 = a)$
$a^{\log_a b} = b \quad (a^x = b \quad \wedge \quad x = \log_a b\,)$

Teoremi sui logaritmi

Tenendo presente che le uguaglianze:

$\begin{cases} b = a^x \\ c = a^y \end{cases}$ (1) e $\begin{cases} \log_a b = x \\ \log_a c = y \end{cases}$ (2) sono tra loro equivalenti, dimostriamo che:

1. **Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi di ciascun fatto**re.

   Infatti, moltiplicando membro a membro le (1) si ha:
   $b \cdot c = a^x \cdot a^y$
   $b \cdot c = a^{x+y}$ da cui $\log_a b \cdot c = x + y$ e, per le (2) $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$

2. **Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza tra il logaritmo del numeratore e il logaritmo del denominatore.**

   Infatti, dividendo membro a membro le (1) si ha:

   $b : c = a^x : a^y$
   $\dfrac{b}{c} = a^{x-y}$ da cui $\log_a \dfrac{b}{c} = x - y$ e, per le (2) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Dimostriamo inoltre che:

3. **Il logaritmo di una potenza è uguale all'esponente per il logaritmo della base della potenza.**

   Se $a^x = b$ allora $a^{mx} = b^m$

   quindi: $mx = \log_a b^m$ e $\log_a b^m = m \log_a b$

   in particolare, $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \log_a b$

   Esempio $\log_2 \sqrt[3]{a^2} = \log_2 a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \log_2 a$

4. **per passare da un sistema di logaritmi a un altro si applica:** $\log_b n = \dfrac{\log_a n}{\log_a b}$

Supponiamo di conoscere il $\log_a n \quad (n > 0)$ e vogliamo trovare il $\log_b n$

Poniamo: $x = \log_a n \qquad y = \log_b n \quad *$

Per definizione di logaritmo possiamo scrivere: $b^y = n$ e passando ai logaritmi in base a otteniamo:

$\log_a b^y = \log_a n$ da cui, per la terza proprietà, si ricava $y \log_a b = \log_a n \quad y = \dfrac{\log_a n}{\log_a b}$

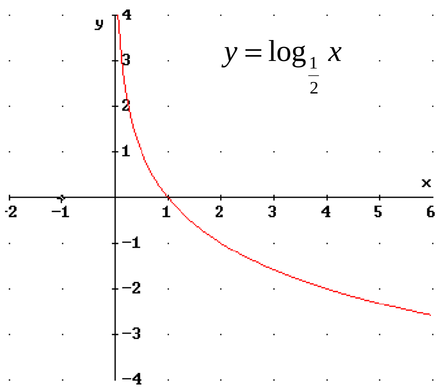
e per la * si ha: $\log_b n = \dfrac{\log_a n}{\log_a b}$

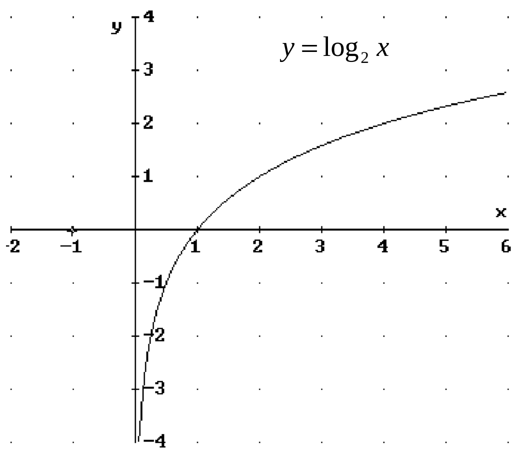
ad esempio: $\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}$

Grafici delle funzioni $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \ln x$

x	y
$\frac{1}{8}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$
$\frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$
4	$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

x	y
$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$
8	$\log_2 8 = 3$





$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$

Applicazioni

- Per calcolare il valore dell’espressione: $\log_2 \sqrt[6]{512} \cdot \sqrt[3]{16\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$

  applichiamo le proprietà dei logaritmi e otteniamo:

  $$\log_2 \sqrt[6]{2^9} + \log_2 \sqrt[3]{2^4 \cdot 2^{1/4}} + \log_2 \left(\frac{1}{2^4}\right)^{1/3} = \log_2 2^{3/2} + \log_2 2^{\frac{4+\frac{1}{4}}{3}} + \log_2{}^{-4/3} =$$

  $$= \frac{3}{2} + \frac{17}{12} - \frac{4}{3} = \frac{19}{12}$$

- per risolvere l’equazione $3^x = 23,2$ passiamo ai logaritmi e otteniamo $\log 3^x = \log 23,2 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{\log 23,2}{\log 3} \cong 2,86$

- determiniamo il numero degli elementi di una progressione geometrica sapendo che:

  $a_1 = 3,\ a_n = 48,\ q = 2$

  Poiché $a_n = a_1\, q^{n-1}$ si ha:

  $\log a_n = \log a_1\, q^{n-1}; \qquad \log a_n = \log a_1 + (n-1)\log q; \qquad n-1 = \dfrac{\log 48 - \log 3}{\log 2} \cong 4$

  quindi $n = 5.$