SISTEMA MISTO

Chiamiamo sistema misto un sistema formato da un'equazione generalmente parametrica e da una o più disequazioni.
Le soluzioni del sistema sono date dalle radici dell'equazione che verificano le disequazioni. Tali soluzioni si diranno **ordinarie** se le radici dell'equazione sono soluzioni delle disequazioni, si diranno soluzioni **limiti** o soluzioni estreme se coincidono con gli zeri delle disequazioni.
La ricerca delle soluzioni del sistema misto va sotto il nome di "**discussione del sistema misto**".

Confronto tra le radici di un'equazione parametrica di secondo grado e un numero reale α.

- Se $\Delta > 0$ si possono verificare i seguenti casi:

$x_1 \quad x_2 \quad \alpha$ $\qquad$ $x_1 \quad \alpha \quad x_2$ $\qquad$ $\alpha \quad x_1 \quad x_2$

- Se $\Delta = 0$ il numero α può occupare le seguenti posizioni:

$x_1 = x_2 \quad \alpha$ $\qquad$ $\alpha = x_1 = x_2$ $\qquad$ $\alpha \quad x_1 = x_2$

- Se $\Delta < 0$ non esistono radici reali e viene a mancare qualsiasi confronto.

Per stabilire la posizione del numero reale α rispetto alle radici dell'equazione consideriamo, oltre al segno di Δ, quello di a e di $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Ricordando che un trinomio di secondo grado con $\Delta > 0$ assume sempre lo stesso segno di a per qualunque valore di x esterno all'intervallo delle radici e segno opposto per qualunque valore di x interno all'intervallo delle radici, possiamo affermare che:

$x_1 \quad \alpha \quad x_2$ $\qquad$ se $a \cdot f(\alpha) < 0$

$\alpha \quad x_1 \quad x_2$ $\qquad$ oppure $\qquad$ $x_1 \quad x_2 \quad \alpha$

se $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Poiché in quest'ultimo caso non è possibile stabilire la posizione di α, confronteremo α con il segno di $\Sigma = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Il numero α sarà a sinistra di x_1

$\alpha \quad x_1 \quad \Sigma \quad x_2$ $\qquad$ quando $\Sigma > \alpha$

Il numero α sarà a destra di x_2

$x_1 \quad \Sigma \quad x_2 \quad \alpha$ $\qquad$ quando $\Sigma < \alpha$.

Metodo di Tartinville

Questo metodo che si basa sulle considerazioni precedentemente fatte permette di confrontare le soluzioni di un'equazione parametrica di secondo grado con uno o due numeri reali assegnati. Le soluzioni del sistema $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$ sono le radici dell'equazione che appartengono all'intervallo $[\alpha; \beta]$

Se il discriminante è positivo si possono presentare i seguenti casi:

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$ $\qquad \xrightarrow{\quad \alpha \quad x_1 \quad \beta \quad x_2 \quad}$

il sistema ammette una soluzione ordinaria, la minore;

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$ $\qquad \xrightarrow{\quad x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad \beta \quad}$

il sistema ammette una soluzione ordinaria, la maggiore;

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$ $\qquad \xrightarrow{\quad \alpha \quad x_1 \quad \Sigma \quad x_2 \quad \beta \quad}$

il sistema ammette due soluzioni ordinarie distinte;
Se, in particolare, $\Sigma - \alpha > 0$ e $\Sigma - \beta > 0$, ferme restando le prime tre condizioni, si ha:

$\xrightarrow{\quad \alpha \quad \beta \quad x_1 \quad \Sigma \quad x_2 \quad}$ e il sistema non ha soluzioni.

Se invece $\Sigma - \alpha < 0$ e $\Sigma - \beta < 0$ si ha: $\qquad \xrightarrow{\quad x_1 \quad \Sigma \quad x_2 \quad \alpha \quad \beta \quad}$

e il sistema non ha soluzioni.

Se il discriminante è nullo:

- $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$ il sistema ha due soluzioni ordinarie coincidenti (vedi grafico)

$\xrightarrow{\quad \alpha \quad x_1 = x_2 = \Sigma \quad \beta \quad}$

E' facile intuire che il sistema non ha soluzioni quando $\Sigma - \alpha$ e $\Sigma - \beta$ hanno lo stesso segno.

Casi limite

Se

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

$$x_1 = \alpha \qquad \beta \qquad x_2 \longrightarrow$$

oppure

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) = 0 \end{cases}$

$$x_1 \qquad \alpha \qquad x_2 = \beta \longrightarrow$$

il sistema ha una soluzione limite.

Nel caso in cui

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$

$$x_1 = \alpha \qquad \Sigma \qquad x_2 \qquad \beta \longrightarrow$$

oppure

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) = 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$

$$\alpha \qquad x_1 \qquad \Sigma \qquad x_2 = \beta \longrightarrow$$

il sistema ammette due soluzioni di cui una limite

Se

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 0 \\ a \cdot f(\beta) = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$$x_1 = \alpha \qquad x_2 = \beta \longrightarrow$$

il sistema ha due soluzioni limite.

nota

Se $a=0$ l'equazione degenera in una di primo grado che ha come soluzione $x=-\frac{c}{b}$ e questa sarà accettabile se cade nell'intervallo $[a;b]$.

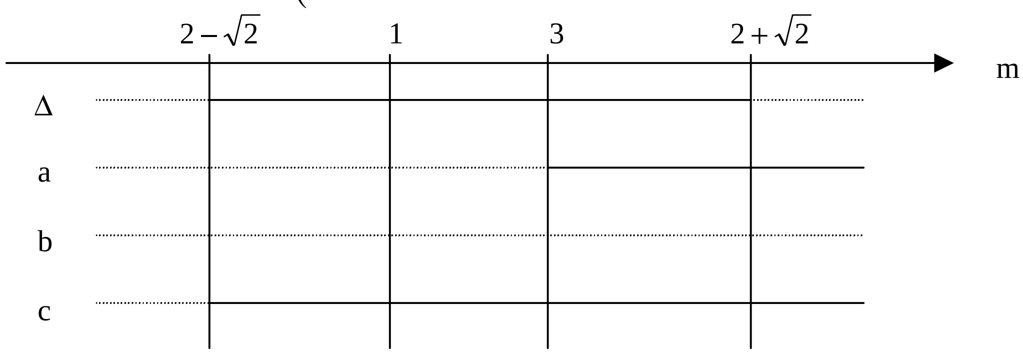
Metodo di Cartesio

E' un caso particolare del metodo di Tartinville e si applica solo quando si richiede che le radici dell'equazione parametrica **siano positive o negative**.
Esso si fonda sul seguente teorema di Cartesio: ***un'equazione di secondo grado con discriminante no negativo possiede una soluzione positiva quando due coefficienti consecutivi presentano una variazione di segno, una soluzione negativa quando hanno una permanenza di segno***. (vedi tabella)

a	**b**	**c**	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$	x_1	x_2
+	+	+	-	+	-	-
+	-	+	+	+	+	+
+	+	-	-	-	-	+
+	-	-	+	-	+	-

Esempio

Discutere il sistema misto: $\begin{cases}(m-3)x^2-2x+m-1=0\\ x>0\end{cases}$



dai risultati ottenuti possiamo affermare che il sistema ha:

una soluzione per $2-\sqrt{2}<m\le 3$

due soluzioni per $3<m\le 2+\sqrt{2}$

METODO GRAFICO

Mediante estrazione del parametro

Questo metodo di discussione implica la conoscenza della geometria analitica e si basa sulla presenza del parametro nei vari coefficienti dell'equazione assegnata.

Consideriamo il sistema misto: $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$

e supponiamo che il parametro sia presente:

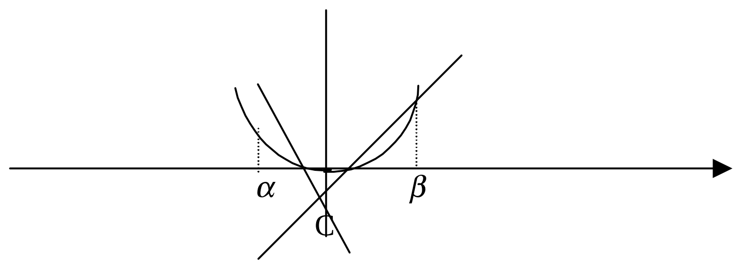
1. in tutti i coefficienti,
2. in a e c,
3. in a e b,
4. solo in a,

in questi casi risolviamo il sistema: $\begin{cases} y = x^2 \\ bx + ay + c = 0 \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$

le due equazioni, sul piano cartesiano, rappresentano rispettivamente:

una parabola avente il vertice nell'origine degli assi e con la concavità verso l'alto;

un fascio proprio di rette



5. nei coefficienti a e b

in questo caso il sistema assume la forma: $\begin{cases} y = ax^2 \\ bx + ay + c = 0 \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$

e la discussione è analoga alla precedente;

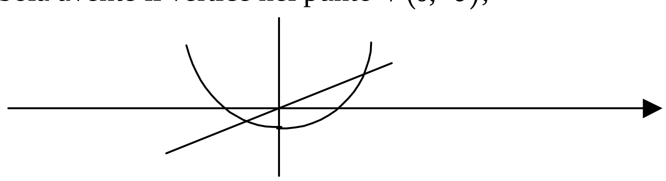
6. solo in a

discutiamo il sistema: $\begin{cases} y = bx \\ y = -ax^2 - c \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$

le due equazioni, sul piano cartesiano, rappresentano rispettivamente:

un fascio proprio di rette avente il centro nell'origine

una parabola avente il vertice nel punto $V(0;-c)$;



7. solo in c

consideriamo il sistema: $\begin{cases} y = c \\ y = -ax^2 - bx \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$

le due equazioni rappresentano rispettivamente:

un fascio di rette parallele all'asse delle ascisse,

una parabola passante per l'origine ed avente l'asse verticale