# SISTEMA MISTO

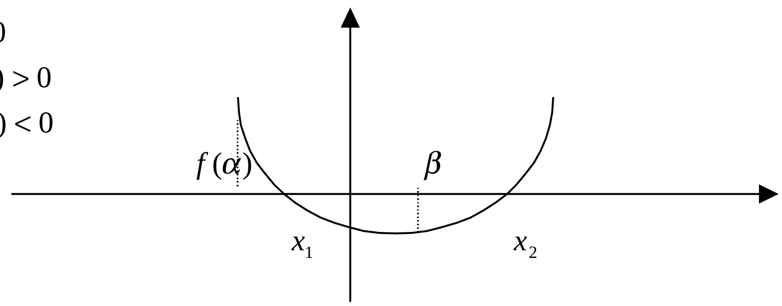
**Metodo della parabola mobile**

Questo metodo interpreta graficamente il metodo di Tartinville quando poniamo $y = ax^2 + bx + c$

ed il sistema assume la forma: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \\ \alpha \leq x \leq \beta \end{cases}$

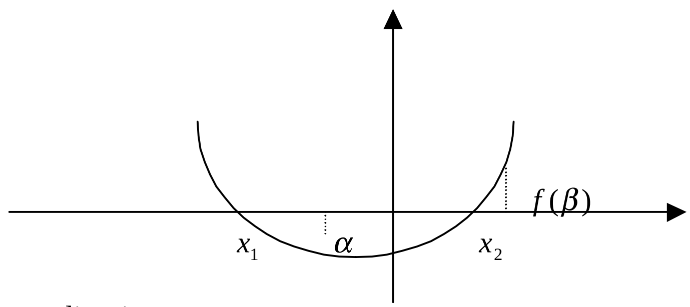
Le equazioni del sistema rappresentano rispettivamente:un fascio di parabole e l'asse $x$.
Riprendendo la trattazione del metodo di Tartinville avremo i seguenti casi:

- Se $\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) < 0 \end{array}$



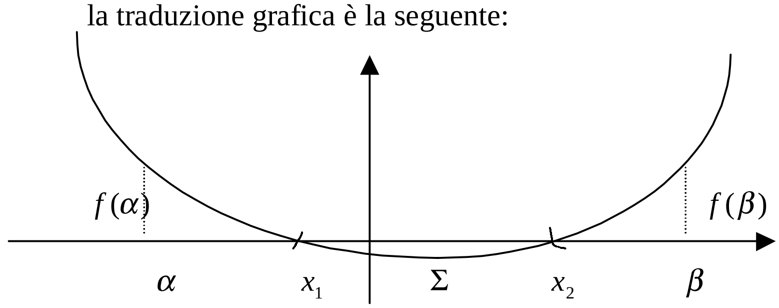

oppure

- $\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(\beta) > 0 \end{array}$



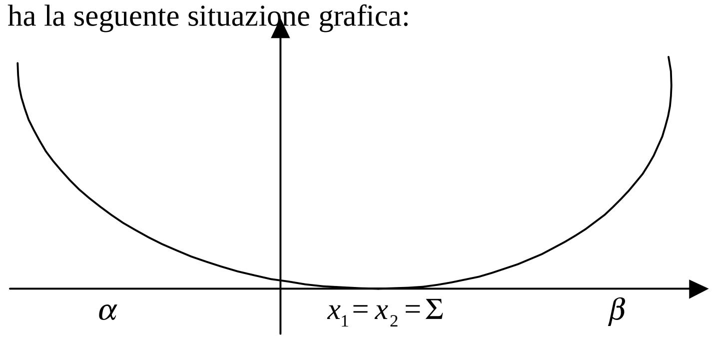

il sistema presenta una soluzione ordinaria.

Se invece $\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{array}$ la traduzione grafica è la seguente:



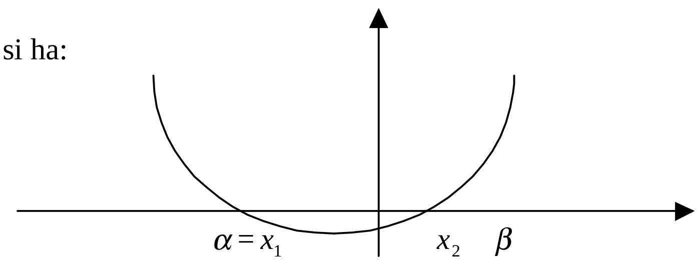

e il sistema ammette due soluzioni ordinarie distinte.

Se $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$ si ha la seguente situazione grafica:




e il sistema ammette due soluzioni ordinarie coincidenti.

Se $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) = 0 \\ f(\beta) > 0 \\ \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$ si ha:




Il sistema ha una soluzione limite e una ordinaria.

Gli altri casi sono facilmente intuibili e non occorre presentarli.

**Metodo di Fourier**

Premesso che quando si confrontano le radici di un'equazione parametrica di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (1)
con un numero reale $\alpha$ si possono presentare i seguenti casi: $x < \alpha$, $x = \alpha$ oppure $x > \alpha$ che equivalgono a:

$$x - \alpha < 0, \qquad x - \alpha = 0, \qquad x - \alpha > 0 \qquad (2)$$

poniamo nella (1) $x = y + \alpha$ e otteniamo: $ay^2 + (2a\alpha + b)y + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.
Poiché $2a\alpha + b = f'(\alpha)$ e $a\alpha^2 + b\alpha + c = f(\alpha)$, la (1) assume la forma:

$$ay^2 + f'(\alpha)y + f(\alpha) = 0 \qquad (3)$$

e le condizioni (2), per effetto della posizione fatta, si trasformano in:

$$y < 0 \qquad\qquad y = 0 \qquad\qquad y>0.$$

Pertanto il confronto delle radici della (1) con il numero $\alpha$ si traduce in quello delle radici della (3) con il numero zero.
Tale confronto può essere quindi condotto con il metodo di Cartesio.

Se $\Delta \geq 0$ e i coefficienti della (3) presentano rispettivamente due variazioni o due permanenze si ha:

$0 < y_1 \leq y_2$ $\qquad\qquad$ $y_1 < y_2 \leq 0$ $\qquad\qquad$ che, tradotte nella variabile x, danno:

$\alpha < x_1 \leq x_2$ $\qquad\qquad$ $x_1 < x_2 \leq \alpha$;

Se $\Delta \geq 0$ e i coefficienti della (3) presentano rispettivamente una variazione e una permanenza si ha:

$y_1 \leq 0 \leq y_2$ $\qquad$ da cui $\qquad$ $x_1 \leq \alpha \leq x_2$.

Dopo aver osservato che il discriminante della (1) si identifica con quello della (3), possiamo affermare che il metodo di Fourier può essere utilizzato anche per discutere il sistema misto:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \alpha \leq x \leq \beta \end{cases}$$

In questo caso, infatti, occorre studiare i segni di: $\Delta$, $a$, $f'(\alpha)$, $f(\alpha)$, $f'(\beta)$, $f(\beta)$ e valutare le permanenze e le variazioni di $a$, $f'(\alpha)$, $f(\alpha)$ e quelle di $a$, $f'(\beta)$, $f(\beta)$ e combinare i risultati ottenuti nei campi comuni del parametro.
Ai fini pratici ci si può servire del seguente schema:

| | $a$ | $f'$ | $f$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | + | - | + | $\alpha < x_1 < x_2$ | $\alpha < \beta < x_1 < x_2$ |
| $\beta$ | + | - | + | $\beta < x_1 < x_2$ | |

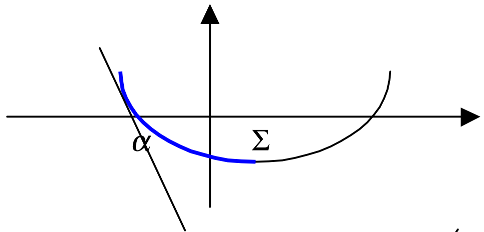
**Interpretazione grafica del metodo di Fourier**

Sia P un punto di ascissa $\alpha$ della parabola $\Gamma$ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ (4).
Sappiamo che per determinare il coefficiente angolare della retta tangente in P alla parabola $\Gamma$ bisogna porre $\Delta = 0$ dell'equazione risolvente il sistema:

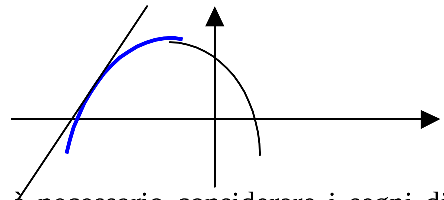
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - \alpha) + y(\alpha) \end{cases}$$

Poiché la soluzione in $m$ (parametro presente nell'equazione di $\Gamma$) di $\Delta = 0$ è: $m = 2a\alpha + b = f'(\alpha)$, il coefficiente angolare della retta tangente a $\Gamma$ in P è dato dal valore che assume la derivata prima della funzione per $x = \alpha$.

- Se a>0 e $f'(\alpha)<0$ la parabola volge la concavità verso l'alto e di essa bisogna considerare i punti in cui la tangente ha il coefficiente angolare negativo, perciò a sinistra del vertice (vedi fig.)



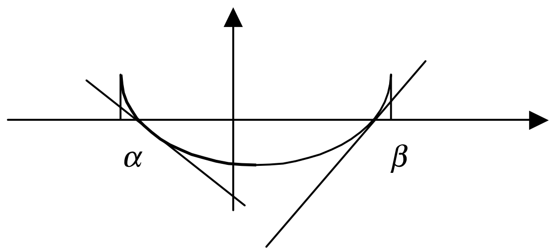

Lo stesso discorso vale quando a<0 e $f'(\alpha)>0$



Quando $a \cdot f(\alpha)$ e $a \cdot f(\beta)$ hanno lo stesso segno è necessario considerare i segni di $f'(\alpha)$ e $f'(\beta)$.

Infatti se a>0

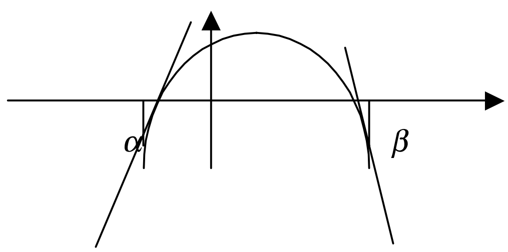
$$e \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ f'(\alpha) < 0 \\ f'(\beta) > 0 \end{cases}$$




osserviamo che $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ e il sistema ammette due soluzioni.

Se a<0

$$e \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ f'(\alpha) > 0 \\ f'(\beta) < 0 \end{cases}$$




anche in questo caso il sistema ha due soluzioni.

Per dimostrare che il metodo di Tartinville è equivalente al metodo di Fourier consideriamo la disequazione $\Sigma - \alpha > 0$ che equivale a:

$$-\frac{b}{2a} - \alpha > 0 \qquad (*)$$

Se a>0 la (*) fornisce: $2a\alpha + b < 0$

Se a<0 " " " $2a\alpha + b > 0$

E' facile osservare che la condizione $\Sigma - \alpha > 0$ del metodo di Tartinville è equivalente ad $a \cdot f'(\alpha) < 0$ del metodo di Fourier.

Lo stesso vale per $\Sigma - \beta < 0$ che è equivalente a $a \cdot f'(\beta) > 0$.