Progressioni aritmetiche

Una successione di numeri reali $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ è una progressione aritmetica se la **d**ifferenza tra un qualunque elemento ed il suo precedente è costante.
Tale differenza si chiama ragione della progressione e la si indica con d.

Esempi:

$\{...., -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, ...,\}$ $\quad d = 3$

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, ...\right\}$ $\quad d = 2$

$\{20, 16, ...0, -4, -8\}$ $\quad d = -4$

Le prime due progressioni sono crescenti $(d > 0)$ e illimitate, la terza è decrescente $(d < 0)$ e limitata.
Per indicare che n numeri formano una progressione aritmetica si usa il simbolo
$\div \; a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$

Teoremi

- L'ennesimo elemento di una progressione si ottiene sommando al primo termine il prodotto del numero degli elementi che lo precedono per la ragione d

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \qquad (1)$$

Infatti, se consideriamo le $(n-1)$ uguaglianze:

$$a_2 - a_1 = d$$
$$a_3 - a_2 = d$$
....
....
$$a_n - a_{n-1} = d$$

e sommiamo membro a membro otteniamo: $a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$ e quindi la (1).

- Se a_j e a_k sono due termini qualunque di una progressione $(k > j)$ si ha:
  $a_k = a_j + (k-j)d \qquad (2)$

Infatti, per la (1) possiamo scrivere: $a_k = a_1 + (k-1)d \qquad a_j = a_1 + (j-1)d$
Sottraendo membro a membro ricaviamo la (2).

- La somma di due termini simmetrici (equidistanti dagli estremi) è costante e vale $a_1 + a_n$.

Infatti, siano a_j e a_k due termini simmetrici. Se indichiamo con l il numero di elementi che precedono a_j e seguono a_k

$\underbrace{1,3,5,}_{l \text{ elementi}}\mathbf{7}, \qquad ,\mathbf{15},\underbrace{17,19,21}_{l \text{ elementi}}$

possiamo scrivere: $\begin{array}{l} a_1 = a_j - l\,d \\ a_n = a_k + l\,d \end{array}$ e, sommando membro a membro, otteniamo:

$a_j + a_k = a_1 + a_n$.

- La somma di n elementi consecutivi è data da: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (3)

Infatti, $\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array}$

E sommando membro a membro ricaviamo: $2\,S_n = n\left(a_1 + a_n\right)$ (*) da cui la (3)

(*) osserviamo che le n somme $a_{n-1} + a_2\,; a_{n-2} + a_3; \ldots\ldots$ sono uguali a $a_1 + a_n$.

ESERCIZI

1. Inserire 5 medi aritmetici tra i numeri 4 e -20

4 * * * * * -20

essendo $a_1 = 4; \quad a_7 = -20$ per la (1) si ha: $-20 = 4 + 6d$ quindi $d = -4$

$a_2 = 0; \quad a_3 = -4; \quad a_4 = -8; \quad a_5 = -12; \quad a_6 = -16$.

2. Sapendo che $a_{15} = 7\sqrt{5}; \quad d = \frac{\sqrt{5}}{2}$ calcolare a_3

Per la (2) si ha: $a_{15} = a_3 + (15-3)d$ quindi $a_3 = 7\sqrt{5} - 12\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$

3. Sapendo che $S_n = 99; \quad a_1 = 3; \quad n = 9$ determinare a_n e d.

Per la (3) si ha: $a_n = \frac{2\,S_n}{n} - a_1$, quindi $a_9 = \frac{2 \cdot 99}{9} - 3 = 19$

e dalla (1) si ricava $d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{19-3}{8} = 2$.