Progressioni geometriche

Una successione di numeri reali $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ è una progressione geometrica se il **q**uoziente tra un qualunque elemento ed il suo precedente è costante.
Tale quoziente si chiama ragione della progressione e viene indicata con q.

Esempi:
$$2, 4, 8, 16, ... \quad q = 2$$
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ... \quad q = -\frac{1}{2}$$

La prima progressione è illimitata e crescente, la seconda è illimitata a segni alterni.
Noi considereremo solo progressioni geometriche limitate.

Per indicare che n numeri formano una progressione geometrica si usa il simbolo
$\div\div \quad a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$

Teoremi

- L'ennesimo elemento di una progressione si ottiene moltiplicando il primo termine per la ragione elevata al numero dei termini che lo precedono

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \qquad (1)$$

Infatti, se consideriamo le $(n-1)$ uguaglianze:
$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q \\ &................. \\ &............. \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

le moltiplichiamo membro a membro $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot .... \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 q \cdot a_2 q \cdot a_3 q \cdot a_4 q \cdot .... \cdot a_{n-1} q$
e semplifichiamo, otteniamo la (1).

- Se a_j e a_k sono due termini qualunque di una progressione $(k > j)$ si ha:
  $a_k = a_j\, q^{k-j}$ (2)

Infatti, per la (1) possiamo scrivere: $a_k = a_1\, q^{k-1}$ $\qquad a_j = a_1\, q^{j-1}$
Dividendo membro a membro ricaviamo la (2).

- Il prodotto di due termini simmetrici (equidistanti dagli estremi) è costante e vale $a_1 \cdot a_n$.

Infatti, siano a_j e a_k due termini simmetrici. Se indichiamo con l il numero di elementi che precedono a_j e seguono a_k

possiamo scrivere: $\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{a_j}{q^l} \\ a_n = a_k\, q^l \end{array}$ e, moltiplicando membro a membro, otteniamo:

$a_j \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$.

- Il prodotto di n elementi consecutivi è dato da: $P_n = \sqrt{\left(a_1\, a_n\right)^n}$

Infatti, $\begin{array}{l} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot .... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot .... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{array}$

E moltiplicando membro a membro ricaviamo: $P_n^2 = \left(a_1 + a_n\right)^n$ (*) da cui la (3)

(*) osserviamo che i prodotti $a_{n-1} \cdot a_2\, ; a_{n-2} \cdot a_3 ; ....$ sono uguali a $a_1 \cdot a_n$.

- La somma di n elementi consecutivi è data da: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$ (4)

Poiché $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ si ha che:

$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$ moltiplicando ambo i membri per q

$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

e sottraendo membro a membro si ottiene, dopo semplici passaggi, la (3).

ESERCIZI

1. Inserire tre medi geometrici fra i numeri 3 e 243

3, * * * 243

poiché $a_1 = 3;\quad a_5 = 243;\quad n = 5$, tramite la (1) ricaviamo $q = \sqrt[5-1]{\dfrac{243}{3}} = 3$

quindi $a_2 = 9;\quad a_3 = 27;\quad a_4 = 81$

2. sapendo che: $a_1 = 4;$ $a_n = 4096;$ $S_n = 5460$ determinare la ragione ed il numero dei termini.

Dal sistema: $\begin{cases} (q-1)\, S_n = a_1 (q^n - 1) \\ a_n\, q = a_1\, q^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (q-1) \cdot 5460 = 4 \cdot (q^n - 1) \\ 4096\, q = 4\, q^n \end{cases}$ (**)

ricaviamo: $5460\, q - 5456 = 4096\, q \quad \Rightarrow \quad q = 4$
e, sostituendo nella seconda delle (2), $n = 6$