Radicali

Prima di procedere nello studio dei radicali è bene ricordare che:

$a^x \cdot b^y = a^{x+y}$; $a^x : b^y = a^{x-y}$; $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$ $a^n \cdot b^n . c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$

a) Nell'insieme dei numeri reali assoluti l'operazione inversa dell'elevazione a potenza ennesima si chiama **radice aritmetica ennesima** e si indica con $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow \exists_1 x \in \mathbb{R}^+ : x^n = a$.

Per definizione di radice possiamo quindi affermare che: $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

$\sqrt[n]{a^m}$ si chiama radicale; n è l'indice e a^m è il radicando del radicale.

b) Nell'insieme dei numeri reali relativi l'operazione inversa dell'elevazione a potenza ennesima si chiama **radice algebrica ennesima.** In questo caso bisogna distinguere i seguenti casi:

1. se $a > 0$ ed n pari $\sqrt[n]{a} = \pm x$;
2. se $a < 0$ ed n pari $\sqrt[n]{a}$ non esiste;
3. se $a > 0$ ed n dispari $\sqrt[n]{a} = +x$; se $a < 0$ ed n dispari $\sqrt[n]{a} = -x$.

Ad esempio:

1. $\sqrt[4]{16} = \pm 2$
2. $\sqrt{-81}$ non esiste in $\mathbb{R}$ nessun numero x in modo che si abbia $(-x)^2 = -81$
3. $\sqrt[5]{32} = +2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Per quanto detto nel caso b), occorre osservare che, quando nel radicando sono presenti delle variabili reali, dovremo stabilire **l'insieme di esistenza del radicale**.

Esempio:

il radicale $\sqrt{x-2}$ esiste se $x \geq 2$

il radicale $\sqrt[4]{\dfrac{a+3}{a-1}}$ esiste quando $\dfrac{a+3}{a-1} \geq 0 \Rightarrow a \leq -3 \vee a \geq 1$.

Potenze con esponente frazionario

Osserviamo che vale la seguente uguaglianza: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Infatti, elevando ambo i membri a n otteniamo lo stesso risultato:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$$

Possiamo quindi affermare che la potenza di un numero $a > 0$ con esponente frazionario $\dfrac{m}{n}$ è uguale ad un radicale che ha come indice il denominatore della frazione e come esponente il numeratore di tale frazione. Esempio: $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$; $b^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{b^3}$

Proprietà invariantiva

Se moltiplichiamo indice ed esponente di un radicale aritmetico per uno stesso numero $k>0$ otteniamo un radicale equivalente a quello dato. Ovvero: $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}}$

Per dimostrarlo eleviamo ambo i membri a nk e otteniamo lo stesso risultato. Infatti:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k=a^{mk}$$

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk}=a^{mk}$$

Da questa proprietà possiamo subito dedurre che un radicale non cambia se dividiamo indice ed esponente per uno stesso divisore comune.

Ad esempio: $\sqrt[10]{3^6}=\sqrt[2\cdot5]{3^{2\cdot3}}=\sqrt[5]{2^3}$

Se dividiamo l'indice e l'esponente per il loro massimo comune divisore il radicale ottenuto si dice irriducibile.

Riduzione allo stesso indice

Per ridurre due o più radicali allo stesso indice consideriamo il seguente esempio:

Ridurre allo stesso indice i radicali: $\sqrt[12]{x^4};\sqrt[10]{y^3}$

Poiché il primo radicale è riducibile i radicali da considerare sono:

$\sqrt[3]{x};\quad \sqrt[10]{y^3}$

Essendo inoltre $m.c.m.(3;10)=30$, per la proprietà invariantiva possiamo scrivere:

$$\sqrt[3\cdot10]{x^{10}};\quad \sqrt[10\cdot3]{y^{3\cdot3}}\quad\rightarrow \sqrt[30]{x^{10}};\quad \sqrt[30]{y^9}$$

Prodotto e quoziente di due radicali

Per moltiplicare (dividere) due radicali li riduciamo allo stesso indice ed effettuiamo il prodotto (quoziente) dei radicandi ottenuti.

Esempi: $\sqrt[5]{x-2}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^4}=\sqrt[5]{x-2}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}=\sqrt[15]{(x-2)^3\cdot(x+1)^{10}}$

$$\sqrt[3]{(a+1)^2}:\sqrt[5]{a^2-1}=\sqrt[15]{\frac{(a+1)^{10}}{\left(a^2-1\right)^3}}=\sqrt[15]{\frac{(a+1)^{10}}{(a-1)^3(a+1)^3}}=\sqrt[15]{\frac{(a+1)^7}{(a-1)^3}}$$

Trasporto di un fattore sotto segno di radice

Per trasportare un fattore sotto segno di radice eleviamo questo fattore all'indice del radicale e moltiplichiamo per il radicando.

Esempi: $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{5^3\cdot2}$; $\quad -3\sqrt{2}=-\sqrt{3^2.2}=-\sqrt{18}$; $\quad (x-1)\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{(x-1)^3(x+2)}$

Estrazione di un fattore dal segno di radice

Premesso che è possibile estrarre un fattore dal segno di radice solo se l'esponente m del radicando è maggiore o uguale all'indice n del radicale, operiamo come segue:

-dividiamo l'esponente del fattore per l'indice del radicale $\left(\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}\right)$
-poniamo fuori dal segno di radice il fattore elevandolo al quoziente q
-lasciamo sotto segno di radice il fattore elevandolo al resto r
ad esempio: $\sqrt[3]{y^5}=y\sqrt{y^2}$ $(5:3\rightarrow q=1;\ r=2)$

Potenza di un radicale

$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$ infatti: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5\cdot 5}=\sqrt[3]{5^2}$

Oppure: eleviamo ambo i membri al cubo e otteniamo lo stesso risultato. Infatti:

$\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]^3=\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\right]^2=5^2$ $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3=5^2$

Radice di un radicale

$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{2}$

infatti, elevando ambo i membri alla sesta (6=2x3=prodotto degli indici), otteniamo lo stesso risultato:

$\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^6=\left[\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^3\right]^2=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2;$ $\left(\sqrt[6]{2}\right)^6=2$

Somma algebrica di radicali

Premesso che due radicali sono simili se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando. Possiamo affermare che:
La somma algebrica di due o più radicali simili è uguale a un radicale che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e per radicale lo stesso radicale.
Esempio: $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Esaminiamo i seguenti casi:

1. il denominatore è un radicale quadratico $(n=2)$
2. il denominatore è un radicale di indice $n>2$
3. il denominatore è la somma (differenza) di due radicali quadratici
4. il denominatore è la somma (differenza) di due radicali cubici

1) moltiplichiamo numeratore e denominatore per il radicale che figura al denominatore. Esempio: $\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$;

2) moltiplichiamo numeratore e denominatore per un radicale che ha come indice lo stesso indice e come esponente la differenza tra l'indice e l'esponente del radicale dato. Esempio: $\frac{3}{2\sqrt[5]{a^2}} = \frac{3\sqrt[5]{a^{5-2}}}{2\sqrt[5]{a^2}\sqrt[5]{a^{5-2}}} = \frac{3\sqrt[5]{a^3}}{2a}$;

3) moltiplichiamo numeratore e denominatore per la differenza (somma) dei due radicali quadratici che figurano al denominatore e otteniamo il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Esempi: $\frac{2a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{2a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{2a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

$$\frac{2a}{a-\sqrt{b}} = \frac{2a\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)} = \frac{2a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a^2-b};$$

4) moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a \pm b}$$

Esempio: $\frac{5}{\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{3}} = \frac{5\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}\right)} = \frac{5\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{2+3} =$

$= \sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2\cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}$

ricordando infatti che: $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ possiamo scrivere:

$$a+b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Radicali doppi

Si dimostra che per trasformare un radicale doppio del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ nella somma di due radicali semplici si applica la nota formula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \text{quando } a^2 - b = k^2 \quad k \in \mathbb{R}_0^+$$

Infatti, elevando ambo i membri al quadrato si ottiene lo stesso risultato $a \pm \sqrt{b}$.

Esempio: $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}} - \sqrt{\frac{6-\sqrt{36-20}}{2}} = \sqrt{5}-1$