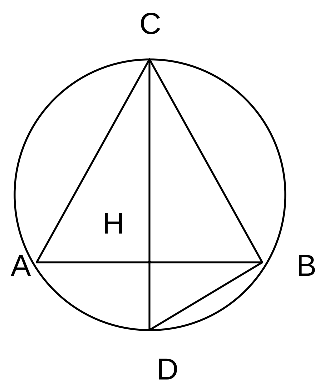
Problemi di secondo grado

Spesso, per risolvere un problema geometrico, è necessario l'uso di strumenti algebrici.
In particolare, si assegnano delle incognite e s'imposta un'equazione o un sistema di equazioni che permettono di risolvere il problema, tenendo conto di relazioni, teoremi e proprietà geometriche inerenti la figura assegnata
Se l'equazione o il sistema di equazioni ha soluzioni reali occorre verificare se queste sono compatibili con il problema assegnato.

Consideriamo alcuni esempi.

1° esempio
Un triangolo è inscritto in una circonferenza avente il raggio di 5 dm. Sapendo che la differenza tra l'altezza e la semibase è 4 dm, calcola l'altezza del triangolo.

Disegniamo la figura e scriviamo i dati forniti dal problema:



$CD = 10; \quad CH - BH = 4$

assegniamo l'incognita: $CH = x \quad \Rightarrow BH = x - 4$

condizioni di realtà: i segmenti CH e BH esistono se $\begin{cases} 0 < x < 10 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4 < x < 10$

Per il 2° teorema di Euclide si ha $CH : BH = BH : HD$
Quindi: $x : (x-4) = (x-4) : HD$ da cui

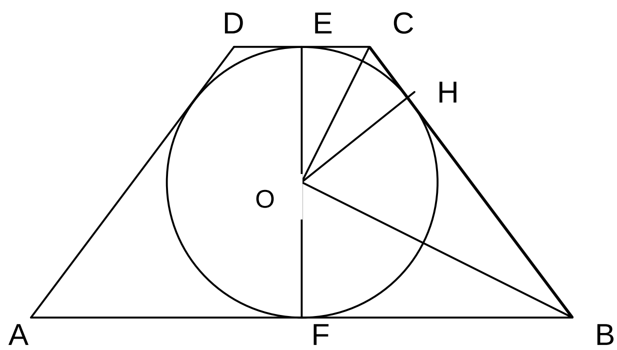
$$HD = \frac{(x-4)^2}{x}$$

ed essendo $CH + HD = 10$ $\quad x + \frac{(x-4)^2}{x} = 10$

dopo semplici passaggi otteniamo $x^2 - 9x + 8 = 0 \quad \Delta = 49 \quad x = \frac{9 \pm 7}{2} \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 8$

La soluzione da accettare è la seconda.

2° esempio



Dati: $\begin{cases} OH = r \\ OB = \frac{5}{3}r \end{cases}$ calcolare: perimetro trapezio

Dimostriamo che il triangolo COB è rettangolo

$\triangle CEO = \triangle COH \quad \Rightarrow \quad \widehat{ECO} = \widehat{HCO} = \alpha$

$\triangle BHO = \triangle BFO \quad \Rightarrow \quad \widehat{HBO} = \widehat{FBO} = \beta$

essendo $\widehat{ECH} + \widehat{HBF} = 2\alpha + 2\beta = 180°$ $\qquad \alpha + \beta = 90°$ e quindi $\widehat{COB} = 90°$

assegniamo le incognite $CH = EC = x \quad (x > 0),\qquad BH = BF = y \quad (y > 0)$
impostiamo il sistema
per il secondo teor. di Euclide: $CH : OH = OH : HB \Rightarrow \quad xy = r^2$

" " primo " " " : $BH : OB = OB : BC \Rightarrow \quad y(x+y) = \left(\frac{5}{3}r\right)^2$

quindi $\begin{cases} xy = r^2 \\ xy + y^2 = \frac{25}{9}r^2 \end{cases}$ $\qquad x + y > 2r$

e, operando per sostituzione, otteniamo: $y^2 = \frac{16}{9}r^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}r \quad e \quad x = \frac{3}{4}r.$

Essendo $BC = \frac{4}{3}r + \frac{3}{4}r = \frac{25}{12}r$ e ricordando che CD+AB=AD+BC=4 BC

$2p = 4 \cdot \frac{25}{12}r = \frac{25}{3}r.$