TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Generalità sulle affinità

Chiamasi affinità o trasformazione lineare una corrispondenza biunivoca tra due piani o tra punti dello stesso piano che trasforma rette in rette conservando il parallelismo.
Dati due punti del piano: P(x, y) e P'(x',y'), diciamo che essi si corrispondono in un'affinità φ se le loro coordinate possono essere espresse mediante equazioni lineari del tipo:

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad (1)$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, p, q$ sono numeri reali e

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \qquad (2)$$

Se $\det A = 0$, la (1) si dice affinità degenere.

Risolvendo il sistema lineare (1) rispetto alle incognite x, y si ottiene:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = x' - p \\ a_{21}x + a_{22}y = y' - q \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} x'-p & a_{12} \\ y'-q & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x'-p \\ a_{21} & y'-q \end{vmatrix}}{\det A}$$

Che, risolte, forniscono le equazioni dell'affinità inversa φ^{-1}.

Definizione Un punto $P \in ß \times ß$ si dice punto unito o fisso per una trasformazione φ , se $\varphi(P) = P$, cioè se il trasformato di P è P stesso.

In particolare, se le equazioni del sistema si riducono a delle identità, allora tutti i punti del piano $\mathbf{R}^2$ sono punti uniti.
Per determinare gli eventuali punti uniti di φ basta porre: $x' = x \qquad y' = y$

Teorema 1 - Una affinità viene univocamente determinata da tre coppie (A, A') , (B, B') , (C,C') di punti corrispondenti tali che né i punti A, B, C né i loro corrispondenti A', B', C' siano allineati.
Infatti, imponendo alle (1) di contenere i punti A, B, C ed i loro corrispondenti, si ottiene un sistema lineare di 6 equazioni nelle 6 incognite
$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, p, q$
che per le ipotesi fatte ammette una sola soluzione.

Le affinità godono di particolari proprietà:

- trasformano rette in rette
- trasformano rette incidenti in rette incidenti
- trasformano rette parallele in rette parallele
- trasformano il punto medio M di un segmento nel punto M' del segmento corrispondente
- conservano costante il rapporto delle aree di figure corrispondenti; tale rapporto costante è chiamato **rapporto di affinità** ed è uguale a: $k = \det A$, (se k>0 l'affinità si dice diretta; se k<0 l'affinità si dice inversa)
- trasformano cerchi o ellissi in cerchi o ellissi
- trasformano parabole in parabole, iperboli in iperboli.

Equazione di una affinità con un punto unito nell'origine

Sia data l'affinità di equazione

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

affinché l'origine O(0, 0) si trasformi in se stesso, deve essere

$$\begin{cases} 0 = a_{11}0 + a_{12}0 + p \\ 0 = a_{21}0 + a_{22}0 + q \end{cases}$$

ovvero $\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$

Quindi, le equazioni di una generica affinità avente come punto unito l'origine sono

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

Caso particolare di affinità è la similitudine.
Casi particolari della similitudine sono: l'omotetia, la dilatazione, le isometrie dirette e inverse (simmetrie centrali, traslazione, rotazione,simmetrie assiali).

Similitudine

Definizione - Si chiama similitudine piana una corrispondenza biunivoca φ di $\mathbf{R}^2$ in se stesso in modo che $\overline{A'B'} = k\,\overline{AB}$ (1)
essendo k un numero reale positivo.

In una similitudine il rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti è costante.
La costante k > 0 prende il nome di rapporto di similitudine.
Per determinare le condizioni analitiche cui devono soddisfare i coefficienti dell'affinità

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + q \end{cases} \qquad (2)$$

affinché si verifichi la (1), consideriamo due punti $A(x_1, y_1);\ B(x_2, y_2)$ e i loro corrispondenti $A'(x'_1, y'_1);\ B'(x'_2, y'_2)$, che per l'affinità (2) hanno coordinate

$$A'(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + p\ ;\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + q)$$
$$B'(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + p,\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + q)$$

Essendo
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
avremo:
$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left[a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1)\right]^2 + \left[a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1)\right]^2} =$$
$$= \sqrt{a_{11}^2(x_2 - x_1)^2 + 2a_{11}a_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_{12}^2(y_2 - y_1)^2 + a_{21}^2(x_2 - x_1)^2 + \overline{+ 2a_{21}a_{22}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + a_2^2(y_2 - y_1)^2}} =$$
$$= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2}$$
Affinché sia valida la (1) deve essere
$$\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = k\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
ossia
$$k\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_2 - x_1)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_2 - y_1)^2}$$
e, confrontando i termini dell'uguaglianza, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = k^2 \\ a_{11}a_{22} + a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = k^2 \end{cases}$$

da cui si ricava: $a_{12}^2\left(a_{21}^2+a_{11}^2\right)=k^2a_{21}^2$

ed essendo $a_{11}^2+a_{21}^2=k^2$ segue che:

$$\boxed{a_{12}=a_{21} \qquad \text{oppure} \qquad a_{12}=-a_{21}}$$

Tenendo conto delle relazioni trovate, la seconda equazione del sistema può scriversi

$a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}=0$ cioè $a_{12}(a_{11}+a_{22})=0$ $\qquad a_{22}=-a_{11}$

oppure

$a_{11}a_{12}-a_{12}a_{22}=0$ cioè $a_{12}(a_{11}-a_{22})=0$ $\qquad a_{22}=a_{11}$

In conclusione si ha:

$$\boxed{\begin{array}{l}(a_{12}=a_{21}) \Rightarrow (a_{22}=-a_{11})\\ (a_{12}=-a_{21}) \Rightarrow (a_{22}=a_{11})\end{array}}$$

Nel primo caso le equazioni della (2) divengono

$$\varphi:\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+p\\ y'=a_{12}x-a_{11}y+q\end{cases}$$

con $\det A=-(a_{11}^2+a_{21}^2)=-k^2$

Nel secondo caso le equazioni della (2) divengono

$$\varphi:\begin{cases}x'=a_{11}x-{}_{12}\,y+p\\ y'=a_{12}x+a_{11}y+q\end{cases}$$

con $\det A=a_{11}^2+a_{21}^2=k^2$

e rapporto di similitudine

$k=\sqrt{a_{11}^2+a_{21}^2}$

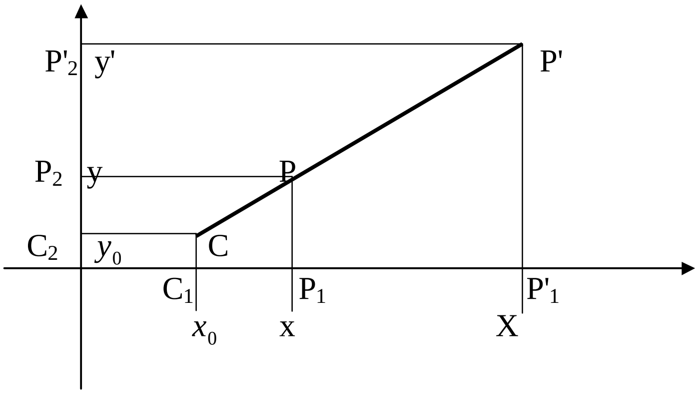
uguale alla radice quadrata del rapporto di affinità $k=\sqrt{|\det A|}$

Il punto unito della trasformazione si dice centro di similitudine.

Omotetia

Definizione 1 Si chiama omotetia di centro $C(x_0,y_0)$ ogni trasformazione biunivoca del piano in se in cui due punti corrispondenti P e P' sono allineati con il centro C in modo che il rapporto tra i segmenti orientati CP' e CP sia uguale a $k\neq 0$. La trasformazione associa quindi ad ogni punto $P(x,y)$ il punto $P'(x',y')$ allineato con C, tale che sia k il rapporto fra i segmenti orientati

$$k = \frac{CP'}{CP}$$



Per il Teorema di Talete, si ha

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = k$$

per cui si ha

$$\varphi : \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$$

e quindi

$$\varphi : \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases} \qquad (1)$$

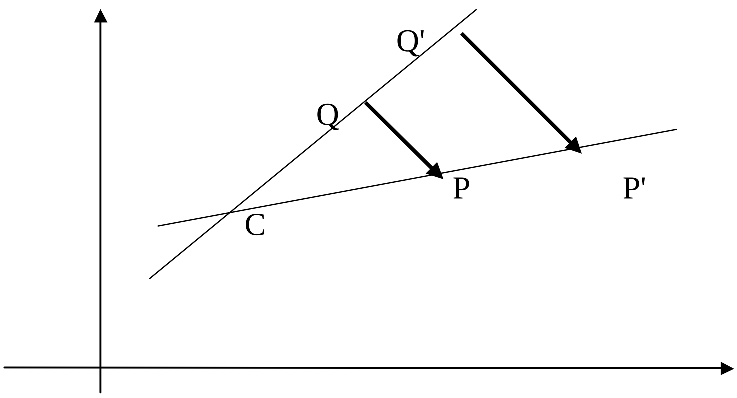
con

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2$$

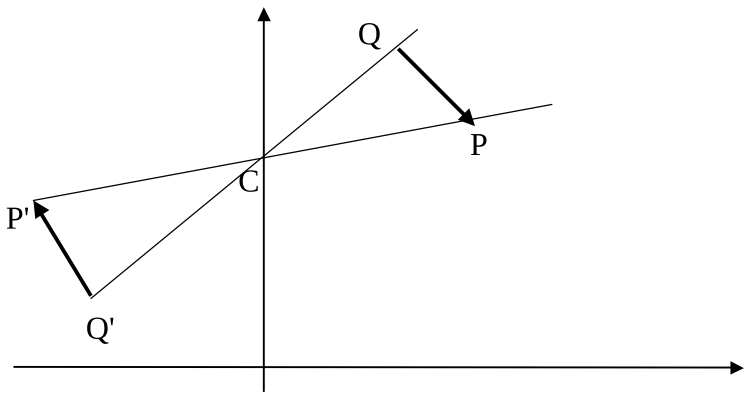
Il punto $C(x_0, y_0)$ è il punto unito della trasformazione e si chiama centro dell'omotetia; ogni retta passante per C viene trasformata in se stessa: è perciò una retta unita.

Teorema - Ogni omotetia è una similitudine di rapporto $|k|$;
se $|k| > 1$ si ha una dilatazione;
se $0 < |k| < 1$ si ha una contrazione
se $k = 1$ si ha l'identità
se $k = -1$ si ha la simmetria centrale di centro C.
Si dimostra che il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti F e F' è uguale al quadrato della costante di omotetia.

Definizione 2 - L'omotetia (1) si dice concorde o diretta se $k \in \mathbf{R}^+$.
Essa trasforma un segmento PQ nel segmento P'Q' parallelo ed equiverso al primo.



Definizione 3 - L'omotetia (1) si dice discorde o inversa se $k \in \mathbf{R}^-$
Essa trasforma un segmento PQ nel segmento P'Q' parallelo e di verso opposto a PQ



Se il centro dell'omotetia è l'origine, la trasformazione ha equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2)$$

che trasformano un punto $P(x, y)$ nel punto $P'(kx, ky)$ e ai punti (1, 0) e (0, 1) corrispondono i punti (k , 0) e (0, k) per cui le (2) rappresentano un cambiamento di unità di misura per i segmenti del piano se k è positivo; se k è negativo rappresentano anche un cambiamento del senso positivo degli assi del sistema. (vedi dilatazioni).

Dilatazioni

Sono particolari affinità che hanno gli assi coordinati e l'origine uniti.

Definizione - Si dice dilatazione un'affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = px \\ y' = qy \end{cases} \qquad \text{con } p, q \in \mathbf{R}\text{-}\{0\} \qquad (1)$$

Questa terminologia è dovuta al fatto che tali trasformazioni non mantengono invariate le distanze, per cui se P e P' , Q e Q' sono coppie di punti corrispondenti, si ha:

$\overline{PQ} \neq \overline{P'Q'}$

Nel primo caso la dilatazione determina un allungamento del segmento PQ, nel secondo caso provoca una contrazione di PQ.

Se nella (1) è $q = 1 \; e \; p \neq 1$ si ha una dilatazione orizzontale, più precisamente,

se $|p| > 1$

si ha una dilatazione concorde o discorde secondo che risulti $p > 1 \; o \; p < 1$.

Se $|p| < 1$

si ha una contrazione concorde o discorde secondo che

$p > \in]0,1[\quad \text{o} \quad p > \in]-1,0[$

Se nella (1) $p = 1 \quad e \quad q \neq 1$ si ha

una dilatazione verticale se $|q| > 1$ una contrazione se $|q| < 1$.

Una trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \qquad D = k^2 \qquad \textit{con a e b} \text{ non entrambi nulli}$$

rappresenta una **dilatazione** in cui l'unico punto unito è C che è il centro della dilatazione.

In particolare, se k = 1 si ha:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad D = 1 \qquad \text{che rappresenta una traslazione.}$$

Rotomotetie

Definizione 4 - Si chiama rotomotetia di centro O, di angolo α e costante $k \neq 0$, la trasformazione del piano in se di equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ y' = k(x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha) \end{cases} \qquad (3)$$

Se k = 1 si ha una rotazione di ampiezza α, mentre se α = 0 non si ha un'omotetia.
La (3) si può pensare quindi come la trasformazione che muta un segmento PQ nel segmento corrispondente P'Q' che rispetto al primo risulta ruotato di un angolo α e k volte dilatato.

Isometrie

Si chiama isometria una trasformazione del piano in sé che conserva le distanze , ossia se P'Q' è il segmento corrispondente di PQ nella trasformazione, si ha

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \quad \forall P, Q \in \mathbf{R}^2$$

per cui un'isometria è una particolare similitudine di rapporto $k = 1$. Poiché un'isometria conserva anche gli angoli essa è individuata dalle equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x + a_{11}y + q \end{cases} \quad \text{o} \quad \varphi : \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha + p \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}$$

con det A = 1, detta anche isometria diretta o concorde, oppure

$$\varphi : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + p \\ y' = a_{12}x - a_{11}y + q \end{cases} \quad \text{o} \quad \varphi : \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha + p \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases}$$

con det A = - 1, detta anche isometria inversa o discorde.

Le isometrie, ovvero quelle particolari trasformazioni biunivoche del piano in sé che conservano le distanze e gli angoli, si classificano in
identità
traslazioni
rotazioni
rototraslazioni
simmetrie centrali e assiali

Identità

L'dentità ha equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

nell'identità tutti i punti sono uniti.

Traslazione

Dicesi traslazione ogni isometria diretta nella quale se A' e B' sono i corrispondenti di due punti qualsiasi A e B, rispettivamente si ha $\overline{AA'} = \overline{BB'}$
Le equazioni sono pertanto

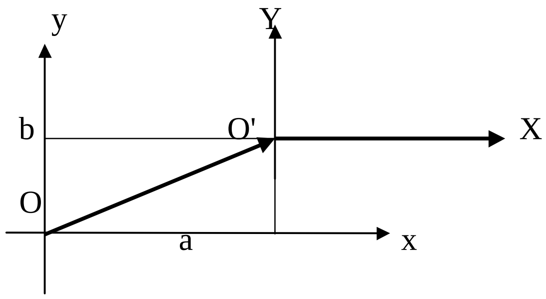
$$\varphi : \begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

Nella traslazione , che non sia l'identità, non vi sono punti uniti.

Traslazione di un vettore $(a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j})$ **.**

Questa porta l'origine nel punto O' (a, b), con **i** e **j** versori degli assi.

Se a = 0 o b = 0 la traslazione è rispettivamente verticale o orizzontale.



Rotazione

Si dice rotazione di centro O e di ampiezza β, la corrispondenza biunivoca che ad O associa O stesso e ad ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ associa $P' \in \mathbf{R}^2$ in modo che $\overline{OP} = \overline{OP'}$
e l'angolo orientato $P\hat{O}P'$ sia congruente e concorde a β .

Le equazioni della rotazione attorno all'origine sono

$$\varphi : \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{rotazione diretta}$$

oppure

$$\varphi : \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\alpha \\ y' = x\,\mathrm{sen}\alpha - y\cos\alpha \end{cases} \qquad \text{rotazione inversa}$$

Nella rotazione il punto O è punto unito.
Se $\alpha = 180°$ si ha la **simmetria centrale** rispetto ad O(0, 0) di equazioni

$$\varphi : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$ si ha x = x' e y = y' che rappresentano la trasformazione identica I, in cui ogni punto del piano è punto unito.

Rototraslazione

Per determinare le coordinate del punto P(x, y) rispetto ad un nuovo sistema di riferimento O' X Y rototraslato rispetto ad O x y, faremo uso delle formule:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha + a \\ y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha + b \end{cases} \quad \text{e, viceversa} \quad \begin{cases} X = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = -(x-a)\,\mathrm{sen}\,\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

che si ottengono dalla composizione dei casi precedenti.