GENERALITA' SULLE CONICHE

Il primo studio su questo tipo di curve risale alla geometria greca (Ippocrate da Chio II a. C.). In epoca moderna le proprietà delle coniche vennero studiate prevalentemente con i metodi della geometria analitica e della geometria proiettiva.
Per giungere al concetto di conica si considera un cono â che si ottiene facendo ruotare una retta g (*generatrice*) intorno ad una retta a (*asse di rotazione*) che incontra la g in un punto V (vertice del cono).
La superficie conica può essere intersecata da un piano α non passante per V in tre modi distinti:

1) Se il piano è secante a tutte le generatrici la sezione è una **ellisse**. Se, in particolare, il piano è anche perpendicolare all'asse di rotazione la sezione è una **circonferenza**.

2) Se il piano è parallelo ad una delle generatrici della superficie la sezione è una **parabola**.

3) Se il piano è parallelo all'asse di rotazione e quindi interseca le due falde della superficie conica, la sezione è una **iperbole.**

Nel caso dell'ellisse e dell'iperbole esistono due sfere, dette sfere di **Dandelin** (dal nome del matematico belga che le introdusse, nel 1822) inscritte nella superficie conica che tocca il piano α in due punti F e F' chiamati **fuochi** della conica. La retta che congiunge i due fuochi risulta essere asse di simmetria della conica e viene chiamata **asse focale**. Il punto medio tra i due fuochi viene chiamato centro della conica.
Nel caso dell'ellisse si ha che la somma delle distanze di ciascun punto dai fuochi è costante, nel caso dell'iperbole si ha che la differenza delle distanze dai fuochi è costante.
Nel caso della parabola esiste una sola sfera inscritta nella superficie conica e tangente al piano α La parabola possiede quindi un solo fuoco.
Ogni conica possiede una eccentricità (rapporto delle distanze di P dal fuoco e dalla relativa direttrice). Questa vale:
1 per la parabola, minore di 1 per l'ellisse, maggiore di 1 per l'iperbole, uguale a 0 per la circonferenza.

Invarianti ortogonali

Dal punto di vista della geometria analitica la conica è una curva che viene rappresentata da una equazione di secondo grado in due variabili del tipo:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (1)$$

Si può dimostrare che il valore delle espressioni:

$$I = a + c \quad \delta = ac - b^2 \quad D = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

resta invariato quando si esegue un qualunque cambiamento d'assi, una trasformazione geometrica (rotazione, traslazione, inversione di orientamento)o il prodotto di due o più trasformazioni Per questo motivo, le suddette espressioni vengono chiamate **invarianti ortogonali** e precisamente: invariante lineare, invariante quadratico e invariante cubico del polinomio:

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Teorema di EULERO

Scegliendo in modo opportuno il sistema di coordinate cartesiane ortogonali, un'equazione di secondo grado in due variabili del tipo (1) si può sempre ridurre ad una delle note forme canoniche.

Dall'esame delle forme canoniche discendono i seguenti teoremi:
1) una conica di equazione (1) è **degenere** se il suo invariante ortogonale D è uguale a 0.
2) se la conica non è degenere ($D \neq 0$), essa è

una **ellisse** se $\delta > 0$

un'**iperbole** $\delta < 0$

una **parabola** se $\delta = 0$

3) in particolare, la conica è un'iperbole equilatera se, oltre ad essere $\delta < 0$, si ha anche $I = 0$

Coniche a centro

Una conica si dice a centro quando esiste un punto rispetto al quale essa risulta simmetrica. Sono coniche a centro l'ellisse (interno), l'iperbole (esterno) e la circonferenza (interno).
dalla dimostrazione del teorema di Eulero risulta che C(m, n) è il centro della conica se le sue coordinate soddisfano il sistema formato dalle equazioni dei diametri:

$$\begin{aligned} ax + by + d &= 0 \\ bx + cy + e &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

con $ac - b^2 \neq 0$

Riduzione dell'equazione in forma canonica
Data l'equazione di una conica a centro nella sua forma più generale (1), vogliamo ridurre tale equazione in forma canonica. Per fare ciò possiamo operare in due modi:

1° metodo)
ricaviamo le coordinate del centro C mediante le (2) ed effettuiamo una traslazione di equazioni:

$$x = X + m$$
$$y = Y + n$$

in modo che la nuova origine coincida con C. La (1) assumerà la forma

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0$$

dove $$F = dm + en + f \quad con \quad F = \frac{D}{\delta}$$

Se effettuiamo adesso una rotazione di assi mediante le note relazioni

$$x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$y = X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha$$

otteniamo un'equazione del tipo

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F = 0 \qquad (3)$$

dove $2B = (c - a)\,\mathrm{sen}\,2\alpha + 2b\cos 2\alpha$

per semplificare la forma della (3) imponiamo che B sia nullo.
Perché ciò accada poniamo

$$2b\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) + 2\,(c - a)\,\mathrm{sen}\alpha\,\cos\alpha$$

ovvero $b \quad tg^2\alpha - (c - a)\,tg\,\alpha = 0$
da cui ricaviamo l'ampiezza della rotazione. E quindi l'equazione della conica nella sua forma canonica.

2° metodo)

Facendo uso degli invarianti, possiamo considerare il sistema:

$$a'c' = ac - b^2$$
$$a' + c' = a + c$$

e associare a questo $f' = \frac{D}{ac - b^2}$

otteniamo così i coefficienti a', c', f' che ci permettono di scrivere l'equazione della conica nella forma canonica

Esempio

Scrivere sotto forma canonica l'equazione:

$$5x + 4xy + 8y + 8x + 14y + 5 = 0$$

essendo $\delta = 40 - 4 = 36 > 0$ (la conica è un'ellisse)

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -81$$

e $I = a + c = 13$

consideriamo il sistema $\begin{cases} a'c' = 36 \\ a' + c' = 13 \end{cases}$

che fornisce $\begin{matrix} a' = 9 & a' = 4 \\ c' = 4 & c' = 9 \end{matrix}$

e, associando a questi, il valore di $f' = -\frac{81}{36}$

perverremo alle equazione richieste:

$$9x^2 + 4y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

Come abbiamo visto, si può giungere allo stesso risultato effettuando dapprima una traslazione di assi nel centro della conica e successivamente una rotazione di assi di ampiezza

Se la conica non è a centro, quindi $\delta = 0$,si semplifica la forma dell'equazione mediante una rotazione di assi come sopra detto In tal modo b' si annulla e l'equazione (1), perdendo il termine in xy, assume una forma del tipo:

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0 \text{ con A diverso da 0}$$

oppure $$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0 \text{ con C diverso da 0}$$

L'equazione così ottenuta può essere trasformata nella forma

$y' = kx'^2 \quad o \quad x' = hy'^2$ con una traslazione di assi.