Esercizi sull'iperbole

1. determinare l'equazione dell'iperbole che ha come asintoti le rette $y = \pm\frac{3}{5}x$ e per fuochi i punti $(\pm 2, 0)$

2. scrivere l'equazione dell'iperbole passante per i punti $A(1,1)$ e $B(-2,-3)$

3. scrivere l'equazione della tangente all'iperbole $xy = 9$ nel punto di ascissa 3

4. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi, con asse traverso coincidente con l'asse x, tangente alla retta di equazione $5x - 4y - 9 = 0$

5. calcolare l'area del triangolo individuato dagli asintoti dell'iperbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e dalla retta $9x + 2y - 24 = 0$

soluzioni

1. essendo: $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{5}a \\ a^2 + \frac{9}{25}a^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{50}{17} \\ b^2 = \frac{18}{17} \end{cases}$ $\quad \frac{17}{50}x^2 - \frac{17}{18}y^2 = 1$

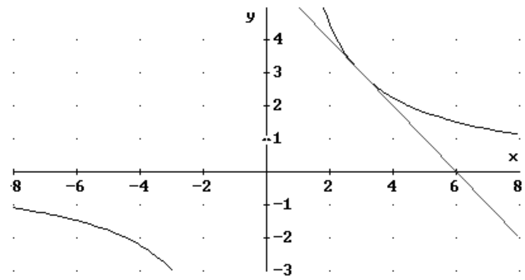
2. per l'appartenenza di A e B all'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ si ha: $\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$ e,

   ponendo $\frac{1}{a^2} = t \quad \frac{1}{b^2} = v$ otteniamo: $\begin{cases} t - v = 1 \\ 4t - 9v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \\ v = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{5}x^2 - \frac{3}{5}y^2 = 1$

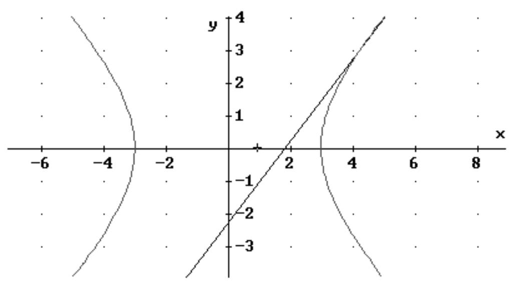
3. per $x = 3 \Rightarrow y = 3 \quad P(3;3)$ l'equazione del fascio di rette di centro P è:

   $y - 3 = m(x - 3)$. Dal sistema $\begin{cases} y = mx + 3 - 3m \\ y = \frac{9}{x} \end{cases}$ ricaviamo $mx^2 + (3 - 3m)x - 9 = 0$.

   Per determinare la retta tangente poniamo $\Delta = 0$,ovvero $(3 - 3m)^2 + 36m = 0$ da cui $m = -1$. Quindi $t: \quad x + y - 6 = 0$



4. dal sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ 5x - 4y - 9 = 0 \end{cases}$ ricaviamo l'equazione $9x^2 - 90x + 81 + 16a^2 = 0$ e imponiamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$ ossia: $2025 - 9(81 + 16a^2) = 0$ e da questa ricaviamo: $a^2 = 9$. Quindi, l'equazione richiesta è: $x^2 - y^2 = 9$



5. Per determinare l'area del triangolo individuato dagli asintoti $a_1 : y = \frac{3}{2}x;\quad a_2 : y = -\frac{3}{2}x$ e dalla retta $r : 9x + 2y - 24 = 0$

Determiniamo $A : a_1 \cap r \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ 9x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;3)$ $\quad B : a_2 \cap r \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ 9x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;-6)$

E calcoliamo $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)(-12-12) = 12$