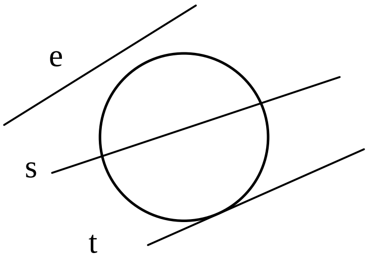
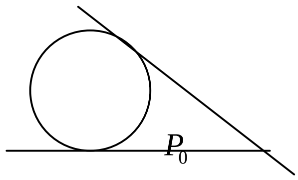
Esercizi sulla circonferenza

- Posizione di una retta $r: y = mx + q$ rispetto ad una circonferenza $\Gamma: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.



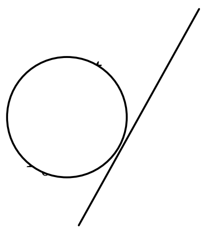
Sappiamo che gli eventuali punti comuni sono dati dalle soluzioni dell'equazione di secondo grado che si ottiene dal sistema $\Gamma \cap r$.
Più precisamente, se $\Delta > 0$ la retta è secante,
se $\Delta = 0$ la retta è tangente,
se $\Delta < 0$ la retta è esterna.

- Calcolo delle equazioni delle rette tangenti ad una circonferenza Γ condotte dal punto $P_0(x_0; y_0)$:



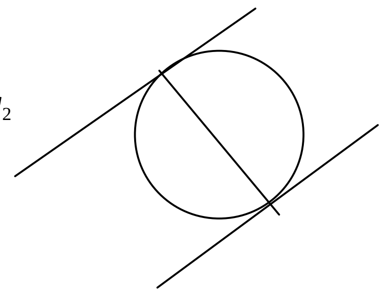
Consideriamo una generica retta $r: y - y_0 = m(x - x_0)$ del fascio di centro $P_0(x_0; y_0)$, ricaviamo il discriminante dell'equazione del loro sistema e, imponendo la condizione di tangenza ($\Delta = 0$), ricaviamo i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle rette richieste.

- Calcolo dell'equazione della retta tangente t ad una circonferenza Γ in un suo punto $P_0(x_0; y_0)$.



Dopo aver determinato il coefficiente angolare della retta CP_0, essendo C il centro di Γ, possiamo scrivere l'equazione della retta t passante per P_0 ed avente coefficiente angolare $m = -\dfrac{1}{m_{CP_0}}$.

- Calcolo delle equazioni delle rette appartenenti al fascio improprio $y = 3x + q$ e tangenti ad una stessa circonferenza Γ:



Dall'equazione $\dfrac{|3x - y + q|}{\sqrt{3^2 + 1}} = r$ ricaviamo i valori q_1 e q_2 delle rette tangenti.

- **Equazione dell'asse radicale** delle circonferenze $\Gamma_1\ e\ \Gamma_2$.

L'asse radicale è la retta che gode delle seguenti proprietà:

1. passa per i punti base del fascio F generato dalle circonferenze assegnate;
2. è perpendicolare alla retta passante per i centri delle circonferenze di F (asse centrale del fascio);
3. è la conica degenere del fascio

Per determinare l'equazione dell'asse radicale del fascio individuato dalle circonferenze:

$\Gamma_1 : x^2+y^2+ax+by+c=0$

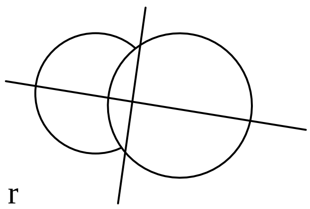
$\Gamma_2 : x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

Consideriamo l'equazione del fascio $(1+k)x^2+(1+k)y^2+(a+ka')x+(b+kb')y+c+kc'=0$
che si ottiene sommando alla prima equazione la seconda moltiplicata per $k\in$ **ß** .
Ponendo $k=-1$ si ottiene l'equazione della conica degenere del fascio:

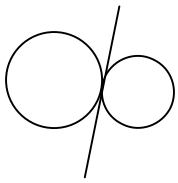
$$r: \quad (a-a')x+(b-b')y+c-c'=0 \qquad (1)$$

per dimostrare quanto è affermato al punto (2) ricaviamo i coefficienti angolari di r e della retta passante per i centri di $\Gamma_1\ e\ \Gamma_k$ avente il centro nel punto $C_k\left(-\dfrac{a+ka'}{2(1+k)};-\dfrac{b+kb'}{2(1+k)}\right)$:

$$m=-\frac{a-a'}{b-b'} \qquad\qquad m_{c_1c_k}=\frac{-\dfrac{b}{2}+\dfrac{b+kb'}{2(1+k)}}{-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a+ka'}{2(1+k)}}=\frac{b-b'}{a-a'}$$



Se F è formato da circonferenze tra loro tangenti
in uno stesso punto P_0 (punto base del fascio),
l'asse radicale è la retta passante per P_0 e
tangente a tutte le circonferenze ed ha equazione (1).



Se il fascio è costituito da circonferenze
concentriche, essendo $a=a'$ e $b=b'$,
avrà equazione: $x^2+y^2+ax+by+\dfrac{c+kc'}{1+k}=0$