

Esercizi

1. Verificare che il fascio di rette di equazione

$$(1-k)x - 2(1-k)y + 3 = 0 \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

è un fascio improprio e determinare le rette che distano $\sqrt{5}$ dal punto $A(3;1)$

Dividendo per $1-k$ otteniamo
$$x - 2y + \frac{3}{1-k} = 0$$

Il coefficiente angolare della generica retta del fascio non dipende da k $\left(m = \frac{1}{2}\right)$

quindi il fascio è improprio.

Inoltre, essendo
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
 possiamo scrivere:
$$\sqrt{5} = \frac{\left|3 - 2 + \frac{3}{1-k}\right|}{\sqrt{5}}$$

Da cui si ricava $k = \frac{1}{4}$ e $k = \frac{3}{2}$ Quindi:
$$r: 3x - 6y + 12 = 0$$
$$s: x - 2y - 6 = 0$$

2. Dopo aver verificato che il fascio di rette di equazione

$$2kx - (k-1)y + k - 2 = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

è un fascio proprio determinare:

a) le equazioni delle rette parallele agli assi; b) il centro C del fascio; c) la retta s passante per $A(1; -2)$; d) la retta p perpendicolare a $r: x - y + 2 = 0$.

Il coefficiente angolare della generica retta del fascio dipende da k $\left(m = \frac{2k}{k-1}\right)$ quindi il

fascio è proprio.

La retta del fascio parallela all'asse x si ha per $k = 0$ $y = 2$

La retta del fascio parallela all'asse y si ha per $k = 1$ $x = \frac{1}{2}$

Per determinare il centro del fascio consideriamo il sistema formato dalle rette che si

ottengono per $k = 0$ e $k = 1$
$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$
 e otteniamo:
$$C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

Imponendo l'appartenenza di $A(1; -2)$ si ha: $2k + 2(k-1) + k - 2 = 0$ che fornisce $k = \frac{4}{5}$

Quindi $s: 8x + y - 2 = 0$

Ricordando che due rette sono perpendicolari quando $m \cdot m' = -1$ scriviamo $\frac{2k}{k-1} \cdot 1 = -1$ e

ricaviamo $k = \frac{1}{3}$ $p: 2x + 2y - 5 = 0$.