Fasci di rette

Data la retta $r:\ y = mx + n$ tutte le rette del piano aventi coefficiente angolare m formano un ***fascio improprio*** che ha r come retta base. L'equazione del fascio sarà quindi:

$$F:\quad y = mx + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Se le rette passano tutte per uno stesso punto $P_0(x_0; y_0)$ si dice che esse formano un ***fascio proprio*** di rette di centro P_0.

Per determinare l'equazione di un fascio proprio consideriamo due rette passanti per P_0

$$r:\quad ax + by + c = 0 \qquad s:\quad a'x + b'y + c' = 0$$

Moltiplichiamo le equazioni delle rette rispettivamente per i parametri λ e μ e, sommando membro a membro, otteniamo $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$

Dividendo poi per μ $(\mu \neq 0)$ e ponendo $\dfrac{\lambda}{\mu} = k$ otteniamo:

$$F:(ka + a')x + (kb + b')y + kc + c' = 0 \qquad (1)$$

Osservazioni

- Osserviamo che se i coefficienti di x e y sono uguali al numero reale l possiamo dividere la (1) per l e ottenere l'equazione $x + y + \dfrac{1}{l}(kc + c') = 0$ che rappresenta un fascio di rette improprio avente come retta base la bisettrice del primo e terzo quadrante. $(m = -1)$

  Possiamo quindi affermare che se il coefficiente angolare $\left(m = -\dfrac{a}{b}\right)$ della generica retta del fascio (1) non dipende dal parametro k il fascio è improprio.

- Per determinare le equazioni delle rette parallele agli assi appartenenti ad un fascio proprio basta porre

$$-\frac{ka + a'}{kb + b'} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad per \quad ka + a' = 0 \quad r // x$$

$$-\frac{ka + a'}{kb + b'} = \infty \quad \Rightarrow \quad m = \infty \quad per \quad kb + b' = 0 \quad s // y$$