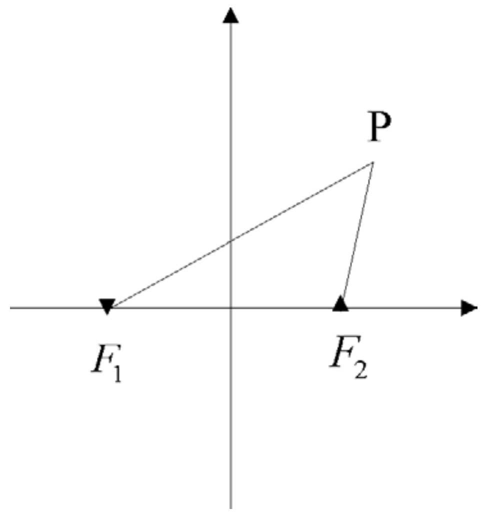
Iperbole

***L'iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza della distanza da due punti fissi detti fuochi*.**

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$

Indichiamo con F_1 ed F_2 i due fuochi e consideriamo come asse x la retta passante per essi e come asse y la retta ad essa perpendicolare e passante per il punto medio di $\overline{F_1F_2}$.



Detta $2c$ la loro distanza, i fuochi avranno coordinate $F_1(-c;0)$ ed $F_2(c;0)$

Avremo quindi

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$

Elevando al quadrato ambo i membri otteniamo

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2-2\sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]} = 2a$$

$$x^2+c^2-2cx+2y^2+x^2+2cx+c^2-2\sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]} = 4a^2$$

$$2x^2+2y^2+2c^2-2\sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]} = 4a^2$$

$$x^2+y^2+c^2-\sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]} = 2a^2$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 = \sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]}$$

$$x^2+y^2+c^2-2a^2 = \sqrt{\left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]}$$

Elevando al quadrato avremo

$$x^4+x^2y^2+c^2x^2-2a^2x^2+x^2y^2+y^4+c^2y^2-2a^2y^2+c^2x^2+c^2y^2+c^4-2a^2c^2-2a^2x^2-$$
$$-2a^2y^2-2a^2c^2+4a^4 = \left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)$$

$$x^4+x^2y^2+c^2x^2-2a^2x^2+x^2y^2+y^4+c^2y^2-2a^2y^2+c^2x^2+c^2y^2+c^4-2a^2c^2-2a^2x^2-$$
$$-2a^2y^2-2a^2c^2+4a^4 = x^4+2cx^3+c^2x^2+x^2y^2-2cx^3-4c^2x^2-2c^3x-2cxy^2+$$
$$+c^2x^2+2c^3x+c^4+c^2y^2+x^2y^2+2cxy^2+c^2y^2+y^4$$

$$-4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 4c^2x^2 = 4a^2c^2 - 4a^4$$

Essendo $2c > 2a$ (in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due), poniamo

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Avremo quindi

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2 otteniamo: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ (1)

che è l'equazione canonica dell'iperbole.

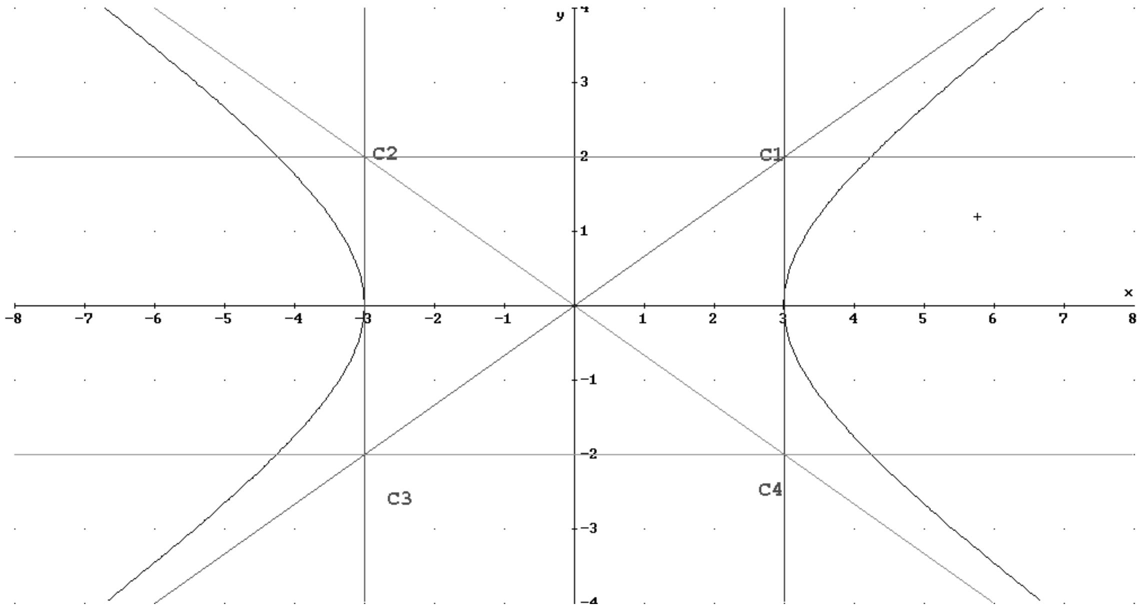


fig.1

Per $x = 0$

$\dfrac{y^2}{b^2} = -1$ non ammette soluzioni, perciò la curva non interseca l'asse y

Per $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad x^2 = a^2 \qquad x = \pm a$$

la curva interseca l'asse x nei punti $A_1(-a;0)$ $A_2(a;0)$ che vengono chiamati vertici dell'iperbole.
L'asse x prende il nome di asse trasverso, mentre l'asse y prende il nome di asse non trasverso

Osservazione: *Risolvendo l'equazione rispetto ad y otteniamo*

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

dovrà quindi essere

$x^2 - a^2 \geq 0$ *e quindi* $x \leq -a \quad \vee \quad x \geq a$

per cui la curva sta al di fuori della striscia delimitata dalle rette $x = -a$ *ed* $x = a$

Essendo $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$, tracciando le rette parallele all'asse x di equazione $y = \pm b$ e le rette di equazione $x = \pm a$ otteniamo un rettangolo di vertici

$C_1(a;b)$ $C_2(-a;b)$ $C_3(-a;-b)$ $C_4(a;-b)$

Per la simmetria tra i punti $C_1(a;b)$ e $C_3(-a;-b)$ ed i punti $C_2(-a;b)$ e $C_4(a;-b)$ rispetto all'origine, le rette C_1C_3 e C_2C_4 hanno equazioni

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y=-\frac{b}{a}x$$

Queste rette vengono chiamate asintoti dell'iperbole perché risultano tangenti alla curva nei suoi punti impropri.
Infatti consideriamo un generico punto P dell'iperbole nel primo quadrante ed il suo corrispondente P' sulla retta $y=\frac{b}{a}x$. Essendo $P\left(x;\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$ e $P'\left(x;\frac{b}{a}x\right)$

La loro distanza sarà

$$d(P,P')=\left|\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|=\left|\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\right|$$

quando $x\longrightarrow+\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}=\left|\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\right|$$

Razionalizzando il numeratore otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}=\left|\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{b}{a}\left(\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)\right|=0$$

Definiamo eccentricità dell'iperbole il rapporto $e=\frac{c}{a}$

Essendo $c>a$ si ha che $e>1$

Iperbole equilatera

Se $a=b$ l'equazione (1) diviene

$$x^2-y^2=a^2 \qquad (2)$$

che è l'equazione dell'iperbole equilatera, i cui asintoti hanno equazioni

$$y=x \qquad\qquad y=-x$$

e sono rispettivamente le bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante

Iperbole equilatera riferita agli asintoti

Se operiamo una rotazione degli assi x e y intorno all'origine O, di ampiezza $\alpha=45^\circ$, in senso orario, gli assi andranno a coincidere con gli asintoti.
Ogni punto dell'iperbole verrà quindi sottoposto alla trasformazione

$$T:\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X) \end{cases}$$

sostituendo nella $x^2-y^2=a^2$ otteniamo:

$$\frac{1}{2}(X+Y)^2-\frac{1}{2}(Y-X)^2=a^2$$
$$\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2+2XY-Y^2-X^2+2XY\right)=a^2$$
$2XY=a^2$ e quindi

$XY=\frac{a^2}{2}$ ponendo $a^2=k$ otteniamo

$XY=k$

e tornando alle coordinate correnti possiamo scrivere

$xy=k$ (*)

che rappresenta l'equazione della proporzionalità inversa.

Se $k>0$ l'iperbole appartiene al 1° e 3° quadrante (i punti hanno coordinate concordi)

Se $k<0$ l'iperbole appartiene al 2° e 4° quadrante (i punti hanno coordinate discordi)

Iperbole equilatera traslata

Dimostriamo che l'equazione

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

rappresenta un'iperbole equilatera traslata

Eseguendo una traslazione degli assi di vettore $\vec{v}(X-p;Y-q)$ l'equazione (*) diventa

$$(X-p)(Y-q)=k$$
$$XY-qX-pY+pq=k$$
$Y(X-p)=k+qX-pq$ e quindi

$$Y=\frac{k+qX-pq}{(X-p)}$$

ponendo $p=-\frac{d}{c}$ $q=\frac{a}{c}$ $k-pq=\frac{b}{c}$ avremo

$$Y=\frac{\frac{a}{c}X+\frac{b}{c}}{X+\frac{d}{c}}$$
$$Y=\frac{aX+b}{cX+d}$$

che in generale si può scrivere

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (3)$$

Il centro di simmetria è $O'(p;q)$ e quindi $O'\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.

Gli asintoti sono le rette

$y=q \iff y=\frac{a}{c}$

$x=p \iff x=-\frac{d}{c}$

Osservazioni

La (3) non rappresenta un'iperbole nei seguenti casi

1. se $c = 0$ e $d \neq 0$ si ha

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$ che rappresenta una retta

2. Se $c \neq 0$ e

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$ cioè

$$ad = bc$$

possiamo scrivere

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = h$$

ovvero

$$a = hc$$
$$b = hd$$

otteniamo

$$y = \frac{hcx + hd}{cx + d} = \frac{h(cx + d)}{cx + d}$$ e quindi

$$y = h$$

che rappresenta una retta parallela all'asse x.