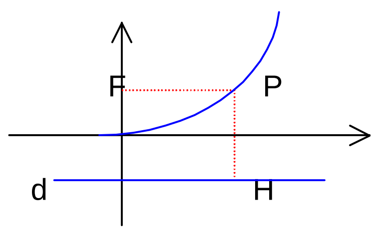
Parabola

Luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta d detta direttrice.

Se $F(0,q)$ e $d: \ y=-q$



da $\overline{PF}=\overline{PH} \Leftrightarrow \overline{PF}^2=\overline{PH}^2$ si ricava: $x^2+(y-q)^2=(y+q)^2$ $y=\frac{1}{4q}x^2$ e,

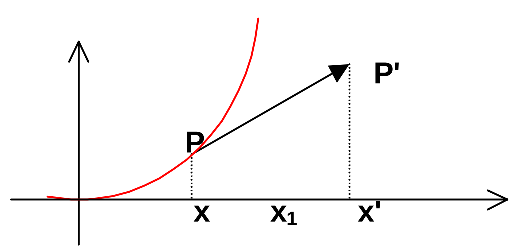
ponendo $\frac{1}{4q}=a$ si ottiene $y=ax^2$ che è l'equazione canonica della parabola

avente: $V(0,0)$; $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$; $d: y=-\frac{1}{4a}$ (**)

Dall'analisi della sua equazione possiamo dedurre che:

- la parabola è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ordinate ($y(-x)=y(x)$);
- quando $a>0 \quad (y>0)$ ha la concavità rivolta verso l'alto, quando $a<0 \quad (y<0)$ ha la concavità rivolta verso il basso.

Se il vertice non coincide con l'origine degli assi cartesiani ma ha coordinate (x_1, y_1)



eseguiamo una traslazione di vettore $\vec{v}=(x_1,y_1)$ e l'equazione $y=ax^2$, per effetto della trasformazione $T:\begin{cases} x'=x+x_1 \\ y'=y+y_1 \end{cases}$, diviene $y-y_1=a(x-x_1)^2$ $y=ax^2-2ax_1x+ax_1^2+y_1$

ponendo: $-2ax_1=b$; $ax_1^2+y_1=c$ si ha $\boxed{y=ax^2+bx+c}$ (1)

Dalle posizioni fatte ricaviamo le coordinate del vertice: $x_1=-\frac{b}{2a}$; $y_1=\frac{4ac-b^2}{4a}$

Conclusioni:

Se la parabola che ci viene assegnata ha l'equazione (1) le (**), per effetto della traslazione T , si trasformano in:

$$V\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \qquad F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \qquad d: \quad y=-\frac{1}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (2)$$

e l'asse di simmetria ha equazione $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Osservazioni

Poiché l'equazione (1) contiene i tre coefficienti a,b,c , per determinarla occorrono tre condizioni tra loro indipendenti.

Se la parabola ha come asse di simmetria una retta parallela all'asse x la sua equazione è: $x=ay^2+by+c$. Essa è la simmetrica della (1) rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante perché si ottiene da essa ponendo $y=x$